Aufgabe 1

Induktion Vorgehensweise:

- Das zu Zeigende in eine Allgemeine Formel bringen (e.g. 1+2+3+...+n $\Rightarrow$ Summenformel)
- IA: Setzte in beide Seiten den kleinsten Wert des Wertebereichs ein
- IV: Das zu Zeigende
- IS: $n \Rightarrow n+1$, d.h. setze n+1 auf einer Seite ein. Forme diese Seite solange um, bis man die IV anwenden kann. Forme das Ergebnis nun solange um, bis man die andere Seite (auch mit n+1) erreicht hat

Tipp zu Summenformeln:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

Binomische Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \mid (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \mid (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Gaußsche Summenformel:

$$1+2+3+4+5+...+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}$$

(1)

IA:	$n = 1$
	$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2$
IV:	$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$
IS:	$n \to n+1$
	$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) =$
	$(\sum_{i=1}^{n}(2i-1)) + (2(n+1)-1) \overset{IV}{=}$
	$n^2 + (2(n+1)-1) =$
	$n^2 + 2n + 1 =$
	$(n+1)^2$
	$\square$

(2)

IA:	$n = 1$
	$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$
IV:	$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
IS:	$n \to n+1$
	$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i^3) + (n+1)^3 \overset{IV}{=}$
	$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$
	$\frac{n^2+2n^3+n^4}{4} + \frac{4+12n+12n^2+4n^3}{4} =$
	$\frac{4+12n+13n^2+6n^3+n^4}{4} =$
	$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ $\square$

(3)

IA:	$n = 0 \Rightarrow (x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^{0-0}y^0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x^{0-k}y^k$
IV:	$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$
IS:	$n \to n+1 \Rightarrow (x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \overset{IV}{=} (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k =$
	$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k$
	$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)x^{n+1-k}y^k$
	$= \binom{n+1}{0}x^{n+1-0}y^0 + \binom{n+1}{n+1}x^{(n+1)-(n+1)}y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k$ □

Aufgabe 2

(1)

Zu zeigen: $n^2 \overset{!}{=} (n+1) * (n-1) + 1$

Beweis:
$(n+1) * (n-1) + 1 = n^2 + 1 - 1 = n^2$

(2)

Zu zeigen: $((n+1)^2 - (n)^2) \mod 2 = 1$

Beweis:
$(n+1)^2 - (n)^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \rightarrow$ Offensichtlich gilt: $2n \mod 2 = 0$
$\Rightarrow 2n + 1 \mod 2 = 1 \Rightarrow ((n+1)^2 - (n)^2) \mod 2 = 1$

(3)

Zu zeigen: $3|n^3 - n \; \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis:

$$n^3 - n = n(n+1)(n-1)$$

Erläuterung: Das sind drei aufeinanderfolgende Zahlen, somit gibt es unter diesen drei Zahlen immer eine Zahl, welche durch 3 teilbar ist. Da somit in der Faktorisierung immer eine 3 vorkommt, ist $n^3 - n$ immer durch 3 teilbar. (Dies gilt auch, wenn der Term ausgewertet 0 ergibt, da nach Definition $a|0 \; \forall a \in \mathbb{N}$).

Blatt 2

Hinweis zu Teilbarkeit

$$q \cdot a = b \text{ bzw. } a|b$$

$\Rightarrow a|b$ bedeutet: **b ist ein Vielfaches von a**

Beispiele:

$$2|(2 \cdot n) \quad 4|40 \quad 27 \nmid 25$$

Wichtige Eigenschaft:

$$a|b \Rightarrow a \leq b$$

Aufgabe 1

Wenn $t > a \geq b$ gilt, ist die Aussage (bis auf t = 1) falsch. Damit lässt sich also folgendes Gegenbeispiel erzeugen:

$$t = 4, a = 2, b = 2 : t \mid (a \cdot b),\ t \nmid a,\ t \nmid b$$

Aufgabe 2

Annahme: $p|n$, daraus folgt: $p \leq n$. Zu zeigen: $p \nmid (n+1)$
Da die Teilbarkeitsrelation reflexiv ist gilt: $p|p$. Zudem ist aus der VL bekannt, dass $p|(p+p+....+p)$ bzw. $p|a \cdot p$, $a \in \mathbb{N}$. D.h. n ist von der Form $a \cdot p$. An dieser Stelle sei zum Verständnis erwähnt, dass p keine Zahlen teilt, welche von anderer Form sind.
Daraus folgt: $p \nmid a \cdot p + b$ mit $0 < b < p$ und $b \in \mathbb{N}$.
Somit gilt:

$$p|n \Rightarrow p \nmid (n+1), p \nmid (n-1)$$

Hinweis: Wenn $n = p$ gilt, ist obiges dennoch erfüllt, da $a \nmid b$ wenn $a > b$

Aufgabe 3

Jede ungerade Zahl kann durch $2n+1$ dargestellt werden. Diese Darstellungsvariante lässt sich umschreiben zu:
Jede ungerade Zahl kann durch $4n+1$ oder $4n+3$ dargestellt werden. Dies kann mit einer Einschränkung wiederrum umgeschrieben werden:
Jede ungerade Zahl größer als 2 kann durch $4n+1$ oder $4n-1$ dargestellt werden.
Alle Primzahlen größer als 2 sind in der Menge der ungeraden Zahlen enthalten.

Aufgabe 4

$p|n!$ mit $p \leq n$, da $n!$ durch die Multiplikation all dieser p's und aller anderen Zahlen kleiner gleich n entsteht. Nun können wir das anwenden, was in Aufgabe 2 bewiesen wurde:

$$p|x \Rightarrow p \nmid (x+1), p \nmid (x-1) \overset{x \to n!}{\Rightarrow} p|n! \Rightarrow p \nmid (n!+1), p \nmid (n!-1)$$

Hierbei wird eine einfache Substitution verwendet.

Blatt 3

Aufgabe 1

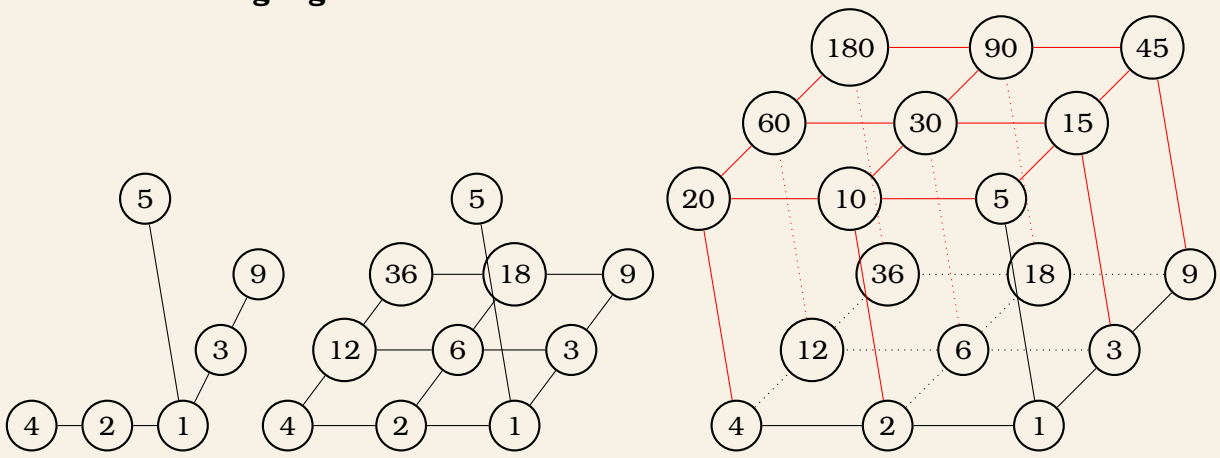
Die Anzahl der gerade und ungeraden vierstelligen Zahlen ist gleich.
Wir betrachten in diesem Fall die Zahlenmenge $M = \{1000, 1001, ..., 9998, 9999\}$. Wir wissen, dass diese Menge 9000 Zahlen enthält, da 10000-1000 = 9000 ist.
Gerade und Ungerade Zahlen treten in den natürlichen Zahlen zudem immer abwechselnd auf. D.h. Zu jeder geraden natürlichen Zahl, gibt es einen ungeraden Nachfolger. Da unsere Menge an Zahlen gerade ist, gibt es somit gleich viele gerade und ungerade Zahlen, nämlich jeweils 4500.
Es gibt also insgesamt 4500 Zahlenpaare, die so aufgebaut sind, dass es jeweils eine gerade Zahl mit einer ungeraden Zahl als Nachfolger ist. Die Differenz dieser Zahlenpaare ist somit immer 1. Da es 4500 solche Zahlenpaare gibt, ist die Differenz der Summe der ungeraden Zahlen zu den Summe der gerade Zahlen 4500.
Somit ist die Summe aller ungeraden vierstelligen Zahlen exakt um 4500 größer, als die Summe der geraden vierstelligen Zahlen.

Hassediagramme anfertigen:

Gegeben: Zahl n
1. Schritt: Primfaktorzerlegung der Zahl n bilden, hierbei sind die Potenzen der einzelnen Zahlen wichtig
2. Schritt: Im Hasse-Diagramm den ersten Knoten, die 1, malen
3. Schritt: Für jede Primzahl eine Knotenkette aus dem ersten Knoten malen, die solange ist, wie die Primzahlpotenz groß ist. Hierbei sind die Knoteneintäge die einzelnen Potenzen bis zur maximalen Potenz
4. Schritt: Durch Multiplikation auf eine diskrete Matrixstruktur schließen. Dabei die einzelnen PrimzahlKnotenketten miteinander multiplikativ verbinden

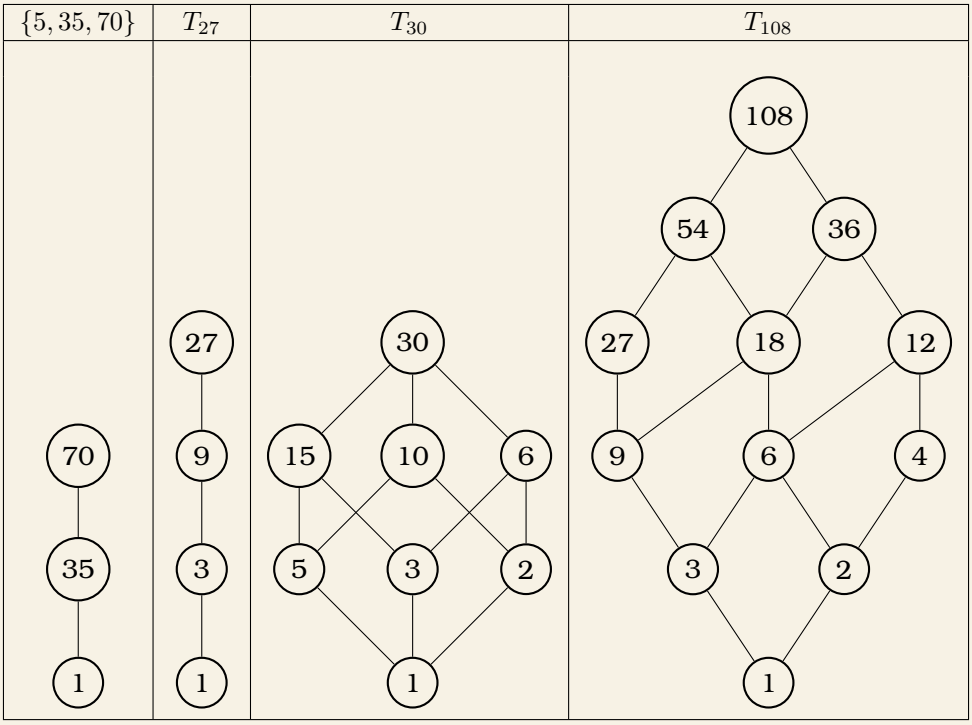
Hinweis: Bei nur einer Primzahl erhält man eine Kette. Bei zwei Primzahlen erhält man ein Rechteck. Bei drei Primzahlen erhält man einen Quader. Ab vier Primzahlen wird es meist kompliziert und unübersichtlich.

Beispiel: 180
$\Rightarrow$ **Primfaktorzerlegung:** $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 180$

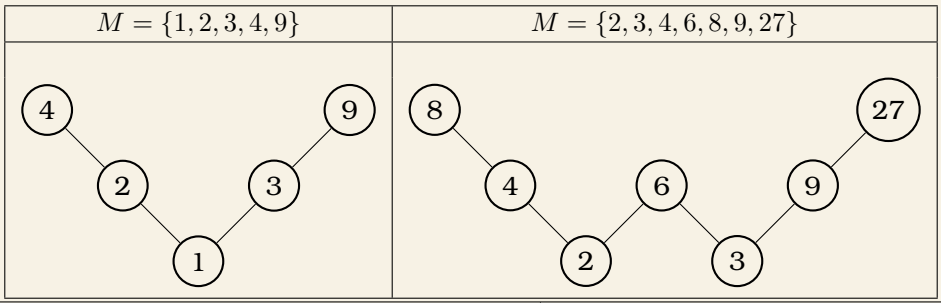


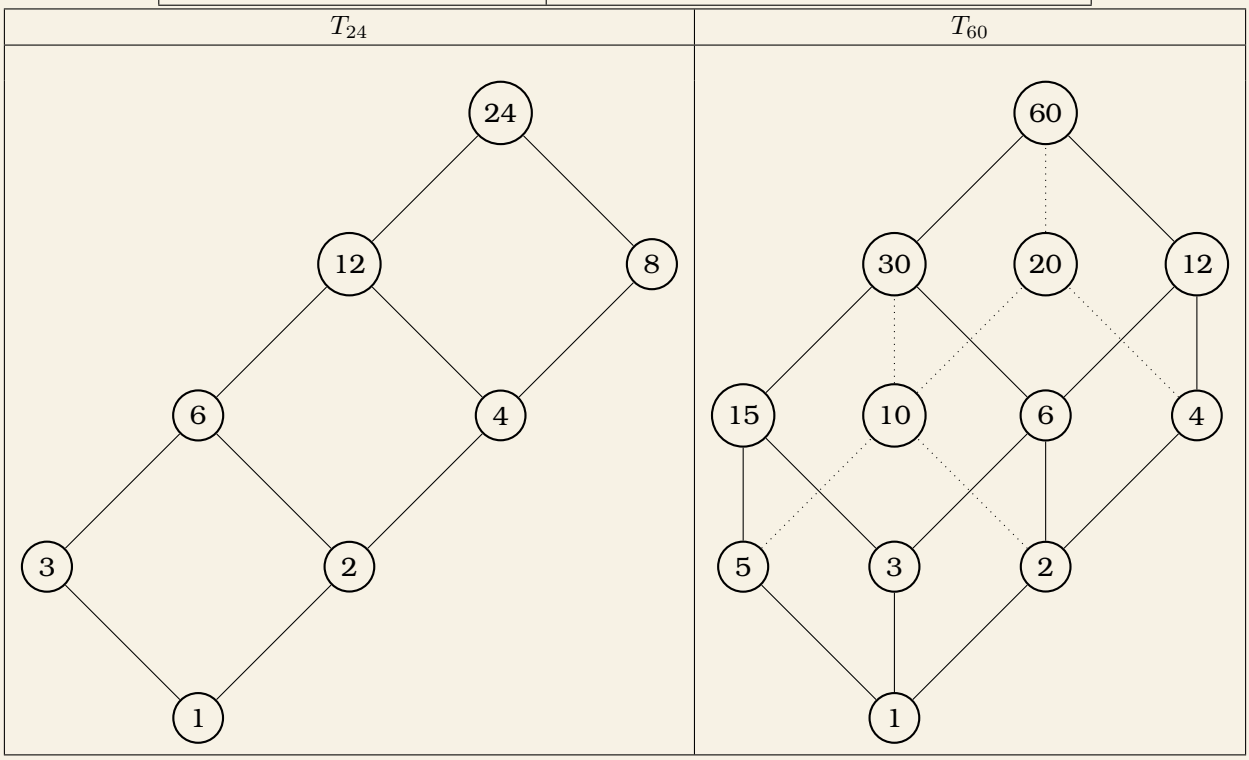
Fazit: Eine Zahl n ist durch alle multiplikativen Permutationen ihrer Primzahl teilbar. Das HasseDiagram zeigt all diese Permutationen graphisch auf.

Aufgabe 2



Aufgabe 3





Blatt 4

Aufgabe 1

(1)
Primzahlen sind Zahlen, welche sich nicht durch die Multiplikation zweier Primzahlen darstellen lassen. Um zu testen, ob eine Zahl eine Primzahl ist, teilt man diese durch alle vorherigen Zahlen (nicht optimal). Wenn das Ergebnis eine Zahl innerhalb der Welt ist, ist die Zahl keine Primzahl, ansonsten schon. Die Optimierte Variante ist das Testen bis zu $\lceil\sqrt{n}\rceil$, so aufgerundet, dass man weiterhin in der gegebenen Zahlenwelt ist:

$$28 : 4 = 7 \notin V, 28 : 8 = 3.5 \notin V \Rightarrow \text{ 28 ist prim}$$

$$32 : 4 = 8 \in V \Rightarrow \text{ 32 ist nicht prim}$$

$$36 : 4 = 9 \notin V, 36 : 8 = 4.5 \notin V \Rightarrow \text{ 36 ist prim}$$

$$40 : 4 = 10 \notin V, 40 : 8 = 5 \notin V \Rightarrow \text{ 40 ist prim}$$

$$44 : 4 = 11 \notin V, 44 : 8 = 5.5 \notin V \Rightarrow \text{ 44 ist prim}$$

Demnach sind ein paar weitere V-Primzahlen: (28,36,40,44).

(2)
Jede Zahl innerhalb der Viererwelt, welche nicht durch 16 Teilbar ist, ist eine Primzahl:

$$p_v \text{ ist prim wenn: } 16 \nmid p_v$$

Jede NichtPrimzahl ist von der Form:

$$a \cdot b \text{ mit } a \in V, b \in \mathbb{N}\backslash V \text{ und } 16 \nmid a$$

(3) und (4)
Jede Zahl in der Viererwelt mit mehr als einer Primfaktorzerlegung ist von der Form:

$$a \cdot b \cdot x \text{ mit } a \neq b, a \in V, b \in V, x \in \mathbb{N}\backslash V$$

Dabei sind a und b natürlich Primzahlen innerhalb der Viererwelt.
Die unterschiedlichsten Primfaktorzerlegungen können nun so erzeugt werden, dass man die Multiplikation auf unterschiedliche Weise zusammenfasst, sodass die Ergebnisse der Multiplikation aber weiterhin in der Viererwelt enthalten sind:

$$96 = 32 \cdot 3 = 8 \cdot 12 = 24 \cdot 4$$

$$4 \cdot 12 \cdot 3 = 12 \cdot 12 = 4 \cdot 36 = 144$$

$$8 \cdot 12 \cdot 3 = 24 \cdot 12 = 8 \cdot 36 = 288$$

Aufgabe 2

(1)
Der ggT bildet nach der Mengenleere den Schnitt zweier Teilermengen und gibt das Maximum aus. Die Teilermenge von 1 = { 1 }. Es ist bekannt, dass $1 \mid a$ gilt.
Daraus folgt dass der ggT(1,a) zuerst den Schnitt der Teilermengen berechnet, was somit immer folgende Menge ist: { 1 }, da $1 \mid 1$ und $1 \mid a$ und in der Teilermenge von 1 keine weiteren Zahlen enthalten sind. Nun wird das Maximum aus dem Schnitt ausgegeben. Dies ist in diesem Fall 1. Somit ist der ggT(1,a) = 1.

Kurzform:
ggT in Mengenlehre ist in etwa: max(Schnitt der Teilermengen). Teilermenge von 1 = { 1 }, und 1 | a für alle a. -> ggT(1,a) = max(Teiler von 1 geschnitten Teiler von a) = max(1) = 1

(2)
Nehmen wir uns wieder die Teilermengen zur Hand: Sei Ma die Menge der Teiler von a. Trivialerweise gilt: $a \in Ma$. Zudem wissen wir, dass $a|b$. Somit gilt für die Teilermenge Mb von b folgendes: $a \in Mb$.
Aus der Aufgabe von vorher wissen wir, dass $x \mid y$, nur wenn $x \leq y$.. Das bedeutet, dass a die größte Zahl in Ma darstellt. Nachdem nun a auch in Mb vorkommt und der ggT die größte Zahl die in beiden Teilermengen vorkommt wählt, wählt der ggT somit a.

Aufgabe 3

(1) ggT(24,) = 6 $\Rightarrow$ ggT(24,6) = 6
(2) ggT(,225) = 15 $\Rightarrow$ ggT(15,225) = 15
(3) ggT(,) = 12 $\Rightarrow$ ggT(12,12) = 12

Blatt 5

Aufgabe 1

(1):

$$
\begin{aligned}
1441188 &= 388 \cdot 3705 + 3648 \\
3705 &= 1 \cdot 3648 + 57 \\
3648 &= 64 \cdot 57 + 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ ggT(1441188,3705) = 57

(2):

$$
\begin{aligned}
44849 &= 2 \cdot 15695 + 13459 \\
15695 &= 1 \cdot 13459 + 2236 \\
13459 &= 6 \cdot 2236 + 43 \\
2236 &= 52 \cdot 43 + 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ ggT(44849,15695) = 43

(3):

$$
\begin{aligned}
11983984 &= 589 \cdot 20345 + 779 \\
20345 &= 26 \cdot 779 + 91 \\
779 &= 8 \cdot 91 + 51 \\
91 &= 1 \cdot 51 + 40 \\
51 &= 1 \cdot 40 + 11 \\
40 &= 3 \cdot 11 + 7 \\
11 &= 1 \cdot 7 + 4 \\
7 &= 1 \cdot 4 + 3 \\
4 &= 1 \cdot 3 + 1 \\
3 &= 3 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ ggT(11983984,20345) = 1

(4):

$$
\begin{aligned}
598720 &= 69 \cdot 8639 + 2629 \\
8639 &= 3 \cdot 2629 + 752 \\
2629 &= 3 \cdot 752 + 373 \\
752 &= 2 \cdot 373 + 6 \\
373 &= 63 \cdot 6 + 1 \\
6 &= 6 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ ggT(598720,8639) = 1

Aufgabe 2

(1)
Zwei gerade Zahlen a,b sind dann teilerfremd, wenn ggT(a,b) = 1 ist. Das bedeutet: Die kleinste Zahl, die sowohl a und b teilt ist 1. Zwei gerade Zahlen c,d besitzen immer den Teiler 2. Daher ist der ggT(c,d) mindestens 2, wenn nicht sogar größer. Demnach sind zwei gerade Zahlen niemals teilerfremd.

(2)
Um eine Aussage zu widerlegen genügt es, ein Gegenbeispiel anzugeben. In diesem Fall ist dies Teilaufgabe 1.2. Hierbei wurde der ggT(44849,15695) = 43 berechnet. 44849 und 15695 sind offensichtlich ungerade Zahlen. Da diese beiden ungeraden Zahlen nicht teilerfremd sind, da sie beide den Teiler 43 besitzen, ist die Aussage widerlegt.

Restliche Aufgabe 2

(3)
Hierzu eignet es sich erstmal die Algorithmische Implementierung des ggT zu betrachten:

```
def ggT(a,b):
        while(b > 0):
                tmp = b
                b = a % b
                a = tmp
        return a
```

Die zu beweisende Aussage kann folgendermaßen geschrieben werden: $ggT(n+1,n) \stackrel{!}{=} 1$
Wenden wir nun den Algorithmus auf die Aussage an:

$$1.\text{ Iteration: } tmp = n, b = 1, a = n$$

Nach einer Iteration haben wir den Term: ggT(a,1). Nach Definition gilt, dass ggT(a,1) = 1. Das bedeutet, dass auch ggT(n+1,n) = 1 gilt!

Ohne Programmiercode:
Die Berechnung von ggT(n+1, n) sieht folgendermaßen aus:

$$n + 1 = 1 \cdot n \text{ Rest } 1$$

$$n = n \cdot 1 \text{ Rest } 0$$

$$\Rightarrow ggT(n+1,n) = 1$$

Aufgabe 3

Sei x = ggT(n-1,n+1), somit gilt: $x|n-1$ und $x|n+1$. Somit gibt es zwei natürliche Zahlen a, b, sodass ax = n-1 und bx = n+1. Damit kann man ein Gleichungssystem bauen:

$$1 : ax = n - 1$$

$$2 : bx = n + 1$$

Nun rechnet man 2. - 1. folglich: $bx - ax = n + 1 - (n - 1) \Rightarrow x(b - a) = 2$. Damit entstehen 2 Fälle, in welchen die Gleichung gelöst ist:
1. Fall: x = 2 und (b-a) = 1. Dies bedeutet, dass ggT(n-1,n+1) = 2 ist. Da jedoch n eine gerade Zahl ist, ist sowohl n-1 als auch n+1 nicht durch 2 teilbar, weshalb dieser Fall wegfällt.
2. Fall: x = 1 und (b-a) = 2. Dies bedeutet, dass ggT(n-1, n+1) = 1. Damit ist die Aussage bewiesen.

Blatt 1

Erweiterter Euklidische Algorithmus

$$ggT(a,b) = x \cdot a + y \cdot b$$

Zeile	Reste R	Quotienten Q	x	y
0	a	-	1	0
1	b	-	0	1
i	$R_{i-2}\ mod\ R_{i-1}$	$\lfloor R_{i-2}/R_{i-1} \rfloor$	$x_{i-2} - (q_i \cdot x_{i-1})$	$y_{i-2} - (q_i \cdot y_{i-1})$
i+n	?	?	x	y
i+n+1	0	?	-	-

Hint:
$a > b$, damit der Algorithmus funktioniert. Wenn hierfür die Zahlen aus dem ggT vertauscht werden, müssen auch die Lösungen für x und y getauscht werden.

Diophantische Gleichungen der Form aX + bY = z lösen

Vorgehensweise:

- Es gibt Lösungen wenn $ggT(a,b) = 1$
- Erweiterter Euklidischer Algorithmus für a und b $\Rightarrow$ (x,y)
- Erste Lösung ist $z \cdot (x,y)$
- Gebe alle Lösungen nach dem Satz 4.18 an
- Rein positive Lösungen: Setzte beide Tupeleinträge aus Satz 4.18 > 0. Löse dies nach t auf. Damit erhält man ein Intervall, in welchem die positiven Lösungen abhängig von t liegen. Teste alle Werte wenn möglich, mindestens aber die Intervallgrenzen!
- Bei nur positiven Lösungen verwendet man statt $>$ dieses Zeichen: $\geq$

Satz 4.18

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ eine Lösung. Damit sind nun alle Lösungen gegeben durch:

$$(x_0 + t \cdot b, y_0 - t \cdot a) \text{ mit } t \in \mathbf{Z}$$

Aufgabe 1

(1):
Gibt es Lösungen?: ggT(17,3) = 1, weil beides Primzahlen sind. 1 teilt 158. Somit gibt es mindestens eine Lösung!
Dennoch eignet es sich an zum finden einer Lösung den erweiterten Euklid zu berechnen:

Erweiterter Euklidischer Algorithmus mit 17 und 3

Zeile	Reste	Quotienten	x	y	Formel
0	17	-	1	0	Initial
1	3	-	0	1	Initial
2	2	5	1	-5	$x_2 = x_0 - (q_2 \cdot x_1)$
3	1	1	-1	6	$x_3 = x_1 - (q_3 \cdot x_2)$
4	0	2	-	-	

Daraus folgt: $ggT(17,3) = 1 = 6 \cdot 3 - 1 \cdot 17$. Das bedeutet somit

$$158 \cdot (x,y) = 158 \cdot (6,-1) \Rightarrow (x,y) = (948,-158)$$

Probe: $3 \cdot 948 + 17 \cdot -158 = 2844 - 2686 = 158$

Damit ist die erste Lösung gefunden, nämlich $x = 948$ und $y = -158$
Damit lassen sich anhand des Satzes 4.18 aus dem Skript alle weiteren Lösungen der Gleichung finden.

$$(948 + t \cdot 17, -158 - t \cdot 3) \forall t \in Z$$

Beispiel mit $t = 1$: $(965,-161) \Rightarrow 3 \cdot 965 + 17 \cdot -161 = 2895 - 2737 = 158$

Zusatzfrage: Gibt es rein positive Lösungen?
Dafür berechnet man zwei Intervalle für t:

$$948 + 17 \cdot t > 0 \Rightarrow t > -\frac{948}{17} \Rightarrow t > -55,76$$

$$-158 - 3 \cdot t > 0 \Rightarrow t < -\frac{158}{3} \Rightarrow t < -52,66$$

Die Drei Lösungen sind durch t= -53, -54, -55 gegeben.
Probe: $3 \cdot 47 + 17 \cdot 1 = 141 + 17 = 158$ und $3 \cdot 30 + 17 \cdot 4 = 90 + 68 = 158$ und $3 \cdot 13 + 17 \cdot 7 = 39 + 119 = 158$

Aufgabe 1

(2)
Gibt es Lösungen?: ggT(16,9) = 1, weil beides Primzahlen sind. 1 teilt 35. Somit gibt es mindestens eine Lösung!
Dennoch eignet es sich an zum finden einer Lösung den erweiterten Euklid zu berechnen:

Erweiterter Euklidischer Algorithmus mit 16 und 9:

Zeile	Reste	Quotienten	x	y	Formel
0	16	-	1	0	Initial
1	9	-	0	1	Initial
2	7	1	1	-1	$x_2 = x_0 - (q_2 \cdot x_1)$
3	2	1	-1	2	$x_3 = x_1 - (q_3 \cdot x_2)$
4	1	3	4	-7	$x_4 = x_2 - (q_4 \cdot x_3)$
4	0	2	-	-	

Darauf folgt: $ggT(16, 9) = 1 = 4 \cdot 16 - 7 \cdot 9$. Das bedeutet somit:

$$35 \cdot (x, y) = 35 \cdot (-7, 4) \Rightarrow (x, y) = (-245, 140)$$

Probe: $9 \cdot -245 + 16 \cdot 140 = -2205 + 2240 = 35$

Damit ist die erste Lösung gefunden, nämlich $x = -245$ und $y = 140$
Damit lassen sich anhand des Satzes 4.18 aus dem Skript alle weiteren Lösungen der Gleichung finden.

$$(-245 + t \cdot 16, 140 - t \cdot 9) \forall t \in Z$$

Beispiel mit $t = 1$: $(-229, -131) \Rightarrow 9 \cdot -229 + 16 \cdot 131 = -2061 + 2096 = 35$

Zusatzfrage: Gibt es rein positive Lösungen?
Dafür berechnet man zwei Intervalle für t:

$$-245 + 16 \cdot t > 0 \Rightarrow t > \frac{245}{16} \Rightarrow t > 15,35$$

$$140 - 9 \cdot t > 0 \Rightarrow t < \frac{140}{9} \Rightarrow t < 15,5$$

Damit gibt es keine rein positiven Lösungen für t!

Aufgabe 2

(1) Unlösbare Gleichungen:
Nach Satz 4.17 muss für $ax+by=c$ gelten, dass $ggT(a,b) \mid c$. Demnach muss man erstmal a und b so festlegen, dass $ggT(a,b) \neq 1$ gilt. Z.b. a = 15 und b = 3, denn $ggT(15,3)=3$. Nun muss c noch so gewählt werden, dass c nicht durch 3 teilbar ist. Seit c demnach 1337. Daraus ergibt sich folgende Gleichung:

$$15x + 3y = 1337$$

Diese Gleichung ist somit unlösbar (innerhalb der ganzen Zahlen).

(2) Lösbare Gleichungen:
Die beiden aus Aufgabe 1. Die erste Teilaufgabe hat sogar rein natürliche Lösungen.

Nach Satz 4.20 den kgv(a,b) berechnen

- Berechne Primfaktorzerlegung von $a = \prod x_i$
- Berechne Primfaktorzerlegung von $b = \prod y_i$
- Bilde eine Menge M aus den vorkommenden Primfaktoren
- Bestimme zu jeder Primzahl in M die höchste Potenz aus a oder b und schreibe sie zur Primzahl hinzu, damit entsteht M'
- Der kgv(a,b) ist das Produkt aller Primzahlen mit ihren Potenzen aus M'

Beispiel kgv(756, 48):

- $756 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$
- $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
- $M = \{2, 3, 7\}$
- $M' = \{2^4, 3^3, 7^1\}$
- $kgv(756, 48) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^1 = 3024$

Aufgabe 3

(1) $kgv(3,x) = 24 \Rightarrow x = \pm 8, \pm 24$, da $24/3 = 8$ und $3 \mid 24 \Rightarrow 24$
(2) $kgv(6,x) = 108 \Rightarrow$ Anhand der Primfaktorzerlegungen: $x = 108$
(3) $kgv(x,y) = 12 \Rightarrow$ Trivial: (1,12) oder (12,1). Durch Primfaktorzerlegung: (3,4),(4,3)

Wenn es mehrere Lösungen gibt, wurden diese angegeben. Im Grunde muss für jede kgv-Berechnung eine Primfaktorzerlegung durchgeführt werden. Wenn diese bekannt ist, kann man anhand von Satz 4.20 alle weiteren Zahlen herleiten!

Aufgabe 4

Ist mir zu kompliziert!

Blatt 7

Aufgabe 2

Multiplikationstafel:

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

Um diese Tabellen zu erstellen muss eig. nur der Eintrag aus der Linken Spalte mit dem Eintrag aus der oberen Zeile verrechnet werden. Das Ergebnis muss dann noch modulo gerechnet werden und kann eingetragen werden.

Nullteiler:
Nullteiler sind auf jeden Fall 2,4,6. Dies geht aus Satz 5.18 hervor. 0 ist hierbei kein Nullteiler, da im Beweis zu Satz 5.18 diese extra ausgeschlossen wird. Man kommt auf die Nullteiler, wenn man sich in der Multiplikationstabelle anschaut, welche Verknüpfungen 0 als Ergebnis haben und was die dazugehörigen Zahlen sind.

Invertierbare Elemente:
Anhand von Satz 5.20 ist es möglich zu Testen, ob eine Zahl ein multiplikatives Inverses besitzt:

- $ggT(0,8) \neq 1 \Rightarrow$ 0 hat kein multiplikatives Inverse
- $ggT(1,8) = 1 \Rightarrow$ 1 hat ein multiplikatives Inverse
- $ggT(2,8) \neq 1 \Rightarrow$ 2 hat kein multiplikatives Inverse
- $ggT(3,8) = 1 \Rightarrow$ 3 hat ein multiplikatives Inverse
- $ggT(4,8) \neq 1 \Rightarrow$ 4 hat kein multiplikatives Inverse
- $ggT(5,8) = 1 \Rightarrow$ 5 hat ein multiplikatives Inverse
- $ggT(6,8) \neq 1 \Rightarrow$ 6 hat kein multiplikatives Inverse
- $ggT(7,8) = 1 \Rightarrow$ 7 hat ein multiplikatives Inverse

Somit besitzen 1,3,5,7 alle ein multiplikatives Inverse. Das liegt daran, dass diese alle keinen Teiler mit 8 gemeinsam haben.

Aufgabe 3

Für B gibt es in erster Linie 9 Möglichkeiten: $B \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Da wir einen Überlauf brauche, kann A somit nur 9 sein. Wäre A kleiner als 9, könnte man mit der Addition nicht mehr auf eine Zahl größer gleich 100 gelangen, da nur ein einstelliges B addiert werden kann.
Damit gibt es dann durch B bedingt 9 Fälle:
Der erste Fall: A = 9 und B = 1. Wenn wir dies addieren erhalten wir die Zahl 100, das bedeutet, dass B weiterhin 1 ist und C = 0 ist. Somit ist in diesem Fall die Darstellung A A + B = B C C erfüllt.
Für alle anderen Fälle gilt dann nur noch A A + B = D C E. Begründung: A = 9 und $B \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dadurch gilt $AA + B \in [101, 108]$. Für alle diese Zahlen innerhalb des Intervalls kann die Darstellung B C C nicht mehr verwendet werden, sondern es kann nur noch als A A + B = D C E geschrieben werden.
Damit wäre gezeigt, dass die einzige Lösung A = 9 und B = 1 ist.

Aufgabe 1

Um das zuerst einmal festzuhalten: Für alle ungeraden Zahlen a gilt:

$$a \equiv 1 \ mod \ 2$$

Diesen Zusammenhang halte ich für so einfach, dass ich ihn nicht beweise. Nun kann man aber dem Modulator vergrößern und dadurch eine Fallunterscheidung aufbauen. a ist weiterhin eine ungerade Zahl:

$$a \equiv \begin{cases} 1 \ mod \ 8 \\ 3 \ mod \ 8 \\ 5 \ mod \ 8 \\ 7 \ mod \ 8 \end{cases}$$

D.h. a mod 8 kann 4 unterschiedliche Ergebnisse haben. Nun betrachten wir uns das Korollar 5.7 aus der Vorlesung. Anhand dieses machen wir aus a eine Quadratzahl.
Einschub: a ist eine ungerade Zahl. Das Quadrat von a ist auch weiterhin eine ungerade Zahl, da ungerade mal ungerade immer eine ungerade Zahl ergibt.
Wenn a also nun eine Quadratzahl ist, kann die Fallunterscheidung so geschrieben werden (in der cases wird das Korollar angewandt):

$$a^2 \equiv \begin{cases} 1^2 \equiv 1 \ mod \ 8 \\ 3^2 \equiv 9 \equiv 1 \ mod \ 8 \\ 5^2 \equiv 25 \equiv 17 \equiv 9 \equiv 1 \ mod \ 8 \\ 7^2 \equiv 49 \equiv 41 \equiv 33 \equiv 25 \equiv 1 \ mod \ 8 \end{cases}$$

Daraus kann man sehen, dass jede ungerade Quadratzahl kongruent 1 modulo 8 ergibt.

Aufgabe 1

Exponenten verkleinern wenn Modulator prim ist:

Vor der Berechnung kann es nützlich sein, den Exponenten zu verkleinern. Dies geschieht anhand Korollar 5.26. Für jede Primzahl p und für $a, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^m \equiv a^{p \cdot n} \equiv (a^n)^p \equiv a \ mod \ p$$

Um dies Anzuwenden, einfach mal den Exponenten durch den Modulator teilen!

Square and Mulitply

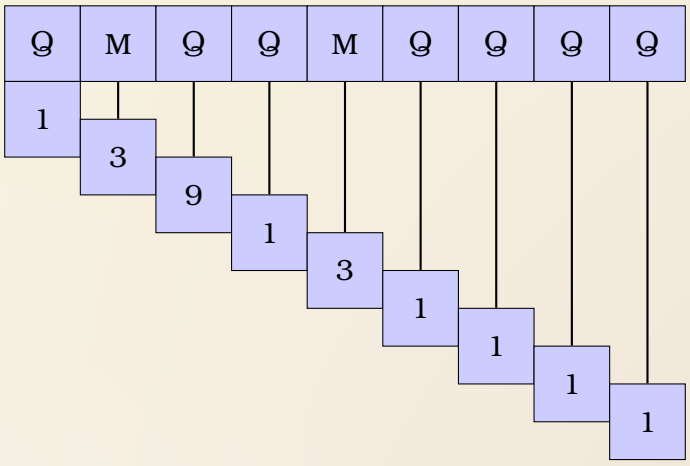
Gegeben: $a^b \ mod \ n$ mit $x = 1$ als Startwert.
Sei $Q \equiv x^2$, d.h. Q quadriert das Zwischenergebnis.
Sei $M \equiv a \cdot x$, d.h. M multipliziert das Zwischenergebnis.

Aufgabenstellung: $3^{80} \ mod \ 10$, damit bekommt man die letzten Ziffer raus!

So nun muss b = 80 ins binäre umgewandelt werden. Das kann man ja im Kopf machen. 80 besteht nämlich aus 64 + 16, was binär somit b = 1010000 ergibt. Nun wandel ich die Binärzahl in eine Zeichenkette um:

$$0 \in b \rightarrow Q$$
$$1 \in b \rightarrow QM$$
$$\Rightarrow QMQQMQQQQ$$

Nun muss nur noch diese Zeichenkette ausgewertet werden. Wie dies geschieht ist oben definiert. a ist hierbei 3 und unser Ergebnis x wird anfangs mit 1 initialisiert:



Die Zahl 3^{80} endet somit mit einer 1.

Aufgabe 2

Korollar 5.7 besagt:

$$a \equiv b \ mod \ m \Rightarrow a^n \equiv b^n \ mod \ m \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Daraus folge ich:

$$2 \equiv 2 \ mod \ 7 \Rightarrow 2^{427} \equiv 2^{427} \ mod \ 7$$

Somit muss nur noch Square and Multiply angewandt werden:

Square and Mulitply

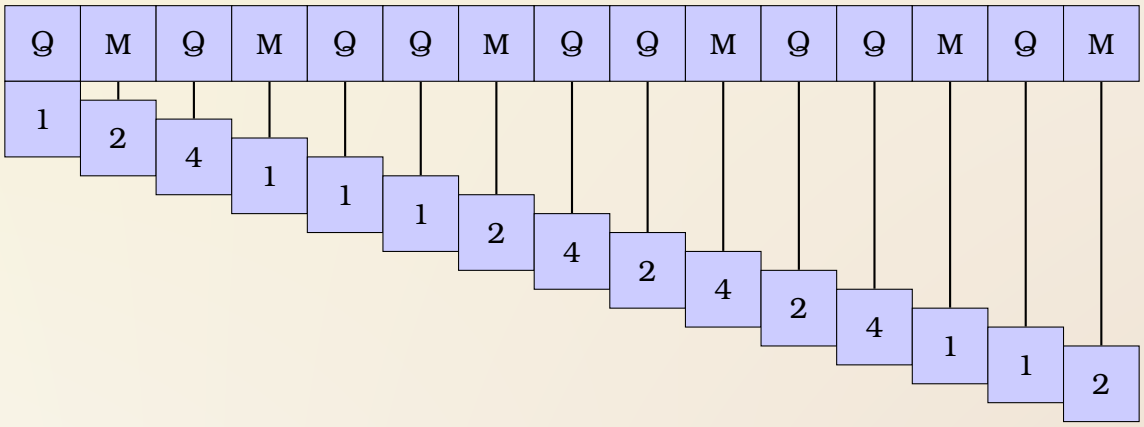
Gegeben: $a^b \ mod \ n$ mit $x = 1$ als Startwert.
Sei $Q \equiv x^2$, d.h. Q quadriert das Zwischenergebnis.
Sei $M \equiv a \cdot x$, d.h. M multipliziert das Zwischenergebnis.

Aufgabenstellung: $2^{427} \ mod \ 7$

So nun muss b = 427 ins binäre umgewandelt werden.Das ist b = 110101011. Nun wandel ich die Binärzahl in eine Zeichenkette um:

$$0 \in b \rightarrow Q$$
$$1 \in b \rightarrow QM$$
$$\Rightarrow QMQMQQMQQMQQMQM$$

Nun muss nur noch diese Zeichenkette ausgewertet werden. Wie dies geschieht ist oben definiert. a ist hierbei 2 und unser Ergebnis x wird anfangs mit 1 initialisiert:



Somit hat 2^{427} geteilt durch 7 den Rest 2.

Vorgehen mit primem Modulator

Gegeben:

$$2^{427} \equiv x \ mod \ 7$$

Lösungsweg durch stetiges verkleinern des Exponenten:

$$2^{427} \equiv 2^{7 \cdot 61} \equiv (2^{61})^7 \equiv 2^{61} \ mod \ 7$$

$$2^{61} \equiv 2^5 \cdot 2^{56} \equiv 2^5 \cdot 2^{7 \cdot 8} \equiv 2^5 \cdot (2^8)^7 \equiv 2^5 \cdot 2^8 \ mod \ 7$$

$$2^5 \cdot 2^8 \equiv 2^5 \cdot 2^1 \cdot 2^7 \equiv 2^5 \cdot 2^1 \cdot 2 \ mod \ 7$$

Wieder zusammenfassen:

$$2^5 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 2^7 \equiv 2 \ mod \ 7$$

Somit ist x = 2

Aufgabe 3

$(\overline{35})^{-1}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 41 & = & 1 \cdot 35 & + & 6 & \Leftrightarrow & 6 & = & 41 - 1 \cdot 35 \\ 35 & = & 5 \cdot 6 & + & 5 & \Leftrightarrow & 5 & = & 35 - 5 \cdot 6 \\ 6 & = & 1 \cdot 5 & + & 1 & \Leftrightarrow & 1 & = & 6 - 1 \cdot 5 \\ 5 & = & 5 \cdot 1 & + & 0 & \Leftrightarrow & 0 & = & 5 - 5 \cdot 1 \end{array}$$

$\Rightarrow 6 - 1 \cdot (5) = 6 - 1 \cdot (35 - 5 \cdot (6)) = 6 - (35 - 5 \cdot (41 - 35)) = (41 - 35) - (35 - 5 \cdot (41 - 35))$
$\Rightarrow (41 - 35) - (35 - 5 \cdot (41 - 35)) = (41 - 35) - (35 - 5 \cdot 41 + 5 \cdot 35)$
$\Rightarrow (41 - 35) - (35 - 5 \cdot 41 + 5 \cdot 35) = 41 - 35 - (-5 \cdot 41 + 6 \cdot 35) = 41 - 35 + 5 \cdot 41 - 6 \cdot 35$
$\Rightarrow = 6 \cdot 41 - 7 \cdot 35$

Nach dem Beweis zu Satz 5.20 lässt sich -7 als multiplikative Inverse identifizieren. Da aber x' einen anderen Wertebereich verlangt, muss noch einmal m = 41 addiert werden. Daraus folgt:

$$(\overline{35})^{-1} = 34 \Rightarrow 35 \cdot 34 \equiv 1 \ mod \ 41$$

$(\overline{35})^{-1}$ im Restklassenkörper 41

Zu lösende Gleichung: $1 = 41 \cdot x + 35 \cdot y$

Zeile	Reste R	Quotienten Q	x	y
0	41	-	1	0
1	35	-	0	1
2	6	1	1	-1
2	5	5	-4	6
3	1	1	5	-7
4	0	5	-	-

y ist die Inverse von 35, damit gilt: $(\overline{35})^{-1} = -7 + 41 = 34 \Rightarrow 35 \cdot 34 \equiv 1 \ mod \ 41$

$(\overline{6})^{-1}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 35 & = & 5 \cdot 6 & + & 5 & \Leftrightarrow & 5 & = & 35 - 5 \cdot 6 \\ 6 & = & 1 \cdot 5 & + & 1 & \Leftrightarrow & 1 & = & 6 - 1 \cdot 5 \\ 5 & = & 5 \cdot 1 & + & 0 & \Leftrightarrow & 0 & = & 5 - 5 \cdot 1 \end{array}$$

$\Rightarrow 6 - 1 \cdot (5) = 6 - (35 - 5 \cdot (6)) = 6 \cdot 6 - 1 \cdot 35$

Nach dem Beweis zu Satz 5.20 lässt sich 6 als multiplikative Inverse identifizieren. Daraus folgt:

$$(\overline{6})^{-1} = 6 \Rightarrow 6 \cdot 6 \equiv 1 \ mod \ 35$$

$(\overline{6})^{-1}$ im Restklassenkörper 35

Zu lösende Gleichung: $1 = 35 \cdot x + 6 \cdot y$

Zeile	Reste R	Quotienten Q	x	y
0	35	-	1	0
1	6	-	0	1
2	5	5	1	-5
3	1	1	-1	6
4	0	5	-	-

y ist die Inverse von 6, damit gilt: $(\overline{6})^{-1} = 6 \Rightarrow 6 \cdot 6 \equiv 1 \ mod \ 35$

Aufgabe 4

Chinesischer Restklassensatz

Aufbau einer Gleichung:

$$x \equiv a_i \ mod \ m_1$$

Daraus folgere ich:

$$M_i = \prod m_j \backslash \{m_i\}$$

$$x \equiv 3 \ mod \ 5 \Rightarrow M_1 = 7 \cdot 11 = 77$$

$$x \equiv 1 \ mod \ 7 \Rightarrow M_2 = 5 \cdot 11 = 55$$

$$x \equiv 2 \ mod \ 11 \Rightarrow M_3 = 5 \cdot 7 = 35$$

Damit wird nun jeweils der erweiterte Euklid berechnet:

$$z_i = x \text{ aus } ggT(M_i, m_i) = M_i \cdot x + m_i \cdot y$$

Zur Lösung eignet es sich an, den erweiterten Euklid zu berechnen!

$$z_1 = -2 : ggT(77, 5) = 77 \cdot x + 5 \cdot y \Rightarrow -2 \cdot 77 + 31 \cdot 5 = 1$$

$$z_2 = -1 : ggT(55, 7) = 55 \cdot x + 7 \cdot y \Rightarrow -1 \cdot 55 + 8 \cdot 7 = 1$$

$$z_3 = -5 : ggT(35, 11) = 35 \cdot x + 11 \cdot y \Rightarrow -5 \cdot 35 + 16 \cdot 11 = 1$$

Ergebnis aus Parametern berechnen:

$$x = a_1 \cdot z_1 \cdot M_1 + ... + a_i \cdot z_i \cdot M_i$$

Das ergibt somit:

$$x = 3 \cdot -2 \cdot 77 + 1 \cdot -1 \cdot 55 + 2 \cdot -5 \cdot 35 = -867$$

Ergebnis verkleinern:

$$x \ mod \ \prod_1^i m_i \Rightarrow -867 \ mod \ 385 = 288$$

Lösungsmenge angeben:

$$\{x | x = 385 \cdot n + 288 \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

Blatt 9

Aufgabe 1

Chinesischer Rest(KLASSEN)satz
Allgemeine Struktur:

$$x \equiv a_i \ mod \ m_i$$

Relevante Daten:

$$\begin{array}{lll} x \equiv 2 \ mod \ 3 & M_0 = 5 \cdot 7 = 35 & z_0 = -1 \\ x \equiv 2 \ mod \ 5 & M_1 = 3 \cdot 7 = 21 & z_1 = 1 \\ x \equiv 4 \ mod \ 7 & M_2 = 3 \cdot 5 = 15 & z_2 = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow M_i$ ist hierbei das Produkt aller $m_j \backslash \{m_i\}$
$\Rightarrow z_i$ ist der erweiterte Euklid von m_i und M_i

Für den erweiterten Euklid gilt:

$$ggT(M_i, m_i) = s \cdot M_i + t \cdot m_i$$

Für den Chinesischen Restsatz interessiert uns der Wert von s

z_0:
$\Rightarrow$ ggT(35,3) = 1 $\Rightarrow 1 = s \cdot 35 + t \cdot 3$
$\Rightarrow$ Man sieht eine Lösung, nämlich s = -1 und t = 12
$\Rightarrow z_0 = -1$

z_1:
$\Rightarrow$ ggT(21,5) = 1 $\Rightarrow 1 = s \cdot 21 + t \cdot 5$
$\Rightarrow$ Man sieht eine Lösung, nämlich s = 1 und t = -4
$\Rightarrow z_1 = 1$

z_2:
$\Rightarrow$ ggT(15,7) = 1 $\Rightarrow 1 = s \cdot 15 + t \cdot 7$
$\Rightarrow$ Man sieht eine Lösung, nämlich s = 1 und t = 2
$\Rightarrow z_2 = 1$

Berechnung der Lösung des chinesisches Restsatzes:

$$res = a_1 \cdot z_1 \cdot M_1 + ... + a_i \cdot z_i \cdot M_i$$

Einsetzen:

$$res = 2 \cdot -1 \cdot 35 + 2 \cdot 1 \cdot 21 + 4 \cdot 1 \cdot 15 = 32$$

Fazit:
Mit dem chinesischen Restsatz lies sich die Lösung x = 32 berechnen. Die Lösungsmenge wird folgendermaßen angegeben:

$$\{x | x = (\prod m_i) \cdot n + res \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

Somit erhält man die folgende Lösungsmenge:

$$\{x | x = 105 \cdot n + 32 \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

Aufgabe 2

ee21 vom 12er System in das 10er System:

e	e	2	1	
.	.	.	.	
12^3	12^2	12^1	12^0	
19008 +	1584 +	24 +	1	= 20617

ee21 vom 12er System in das 10er System:

5	0	z	e	
.	.	.	.	
12^3	12^2	12^1	12^0	
8640 +	0 +	120 +	11	= 8771

Aufgabe 3

$423_{(10)}$ in das 2er System umrechnen:

423	%	2	=	211	Rest:	1
211	%	2	=	105	Rest:	1
105	%	2	=	52	Rest:	1
52	%	2	=	26	Rest:	0
26	%	2	=	13	Rest:	0
13	%	2	=	6	Rest:	1
6	%	2	=	3	Rest:	0
3	%	2	=	1	Rest:	1
1	%	2	=	0	Rest:	1

Man liest das Ergebnis von unten nach oben:

$$423_{(10)} = 110100111_{(2)}$$

$423_{(10)}$ in das 5er System umrechnen:

423	%	5	=	84	Rest:	3
84	%	5	=	16	Rest:	4
16	%	5	=	3	Rest:	1
3	%	5	=	0	Rest:	3

Man liest das Ergebnis von unten nach oben:

$$423_{(10)} = 3143_{(5)}$$

Aufgabe 4

Nachfolger von 35 bei der Basis 6:

3	5	
+	1	
1		
4	0	

$35_{(6)} + 1_{(6)} = 40_{(6)}$

Nachfolger von 455 bei der Basis 6:

4	5	5	
+		1	
1	1		
5	0	0	

$455_{(6)} + 1_{(6)} = 500_{(6)}$

Blatt 10

Aufgabe 1

Nachfolger von 444 im 5er System

	4	4	4
+			1
1	1	1	
1	0	0	0

Vorgänge von 450 im 6er System

	4	5	0
-			1
		1	
	4	4	5

Aufgabe 2

Vorgehensweise

Zuerst muss man sicherstellen, dass man einen vollständig gekürzten Bruch $\frac{m}{n}$ hat. Dafür gilt:

$$ggT(m,n) = 1 \text{ und } 1 \leq m < n$$

Wenn dies nicht gilt, muss Zähler und Nenner noch durch gemeinsame Teiler teilen. Hat man nun einen vollständig gekürzten Bruch $\frac{m}{n}$, reicht es folgende Fallunterscheidung abzuarbeiten:

$$\frac{m}{n} = \begin{cases} \text{endlich} & \text{n hat nur Primfaktoren aus } \{\ 2,\ 5\ \} \\ \text{rein periodisch} & \text{ggT(n,10)=1} \\ \text{gemischt periodisch} & \text{SONST} \end{cases}$$

Wann ist ein Bruch vollständig gekürzt?

Gegeben: $\frac{m}{n}$. Damit muss folgendes gelten:

$$ggT(m,n) = 1 \text{ und } 1 \leq m < n$$

Damit zur Aufgabenstellung:

Der gegebene Bruch $\frac{105}{576}$ ist nicht vollständig gekürzt!

Euklidischer Algorithmus

576	=	5	$\cdot$ 105	+	51
105	=	2	$\cdot$ 51	+	3
51	=	17	$\cdot$ 3	+	0

Damit ist der ggT(105, 576) = 3. Das bedeutet, dass der Bruch weiter gekürzt wird zu: $\frac{35}{192}$. Der ggT(192,35) = 1. Damit hat man einen vollständig gekürzten Bruch!

Ist die Dezimalbruchdarstellung endlich?

Gegeben: $\frac{m}{n}$ als vollständig gekürzten echten Bruch. Damit muss folgendes gelten:

$$\frac{m}{n} \text{ endlich } \Leftrightarrow \text{ n hat nur Primfaktoren aus } \{\ 2,5\ \}$$

Damit zur Aufgabenstellung:

Primfaktorzerlegung von $35 = 7 \cdot 5$. Damit ist die Dezimalbruchdarstellung nicht endlich

Ist die Dezimalbruchdarstellung rein periodisch?

Gegeben: $\frac{m}{n}$ als vollständig gekürzten echten Bruch. Damit muss folgendes gelten:

$$ggT(n, 10) = 1$$

Damit zur Aufgabenstellung:
$ggT(192, 10) \neq 1$ Da beide durch 2 teilbar sind und somit der ggT mindestens 2 ist! Das bedeutet, dass die Dezimalbruchdarstellung nicht rein periodisch ist.

Ist die Dezimalbruchdarstellung gemischt periodisch?

Gegeben: $\frac{m}{n}$ als vollständig gekürzten echten Bruch. Damit muss folgendes gelten:

$$n = n_1 \cdot n_2 \text{ mit } n_1 \mid 10^t \text{ und } ggT(n_2, 10) = 1$$

Damit zur Aufgabenstellung:
$35 = 5 \cdot 7$ und $5 \mid 10$ und $ggT(7, 10) = 1$. Die Dezimalbruchdarstellung von $\frac{35}{192}$ ist gemischt periodisch!

Aufgabe 3

Kettenbruchdarstellung der Zahl $\frac{203}{95}$

Euklidischer Algorithmus

203	=	2	$\cdot$ 95	+	13
95	=	7	$\cdot$ 13	+	4
13	=	3	$\cdot$ 4	+	1
4	=	4	$\cdot$ 1	+	0

Kettenbruch:

$$2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

Kettenbruchdarstellung der Zahl $\frac{17}{28}$

Euklidischer Algorithmus

28	=	1	$\cdot$ 17	+	11
17	=	1	$\cdot$ 11	+	6
11	=	1	$\cdot$ 6	+	5
6	=	1	$\cdot$ 5	+	1
5	=	5	$\cdot$ 1	+	0

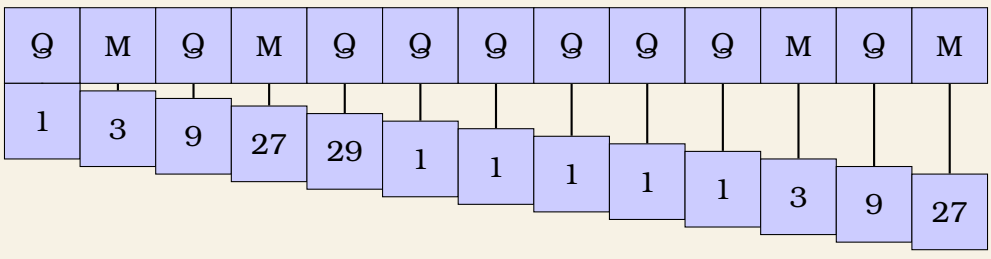
Kettenbruch:
!Zähler ist kleiner als Nenner $\Rightarrow 0 + \frac{1}{\ldots}$**!**

$$0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}$$

Aufgabe 4

Grundlagen:

- $387_{10} = 110000011_2$ mit $1 \to QM$ $0 \to Q$
- Aus 110000011 wird QMQM QQQQQ QMQM
- Multiplikation ist 3
- Modulator ist 35



Damit hat man das Ergebnis: $3^{387} \equiv 27 \; mod \; 35$