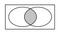
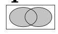
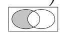
Aussagenlogik und Quantoren **Autor: Julian Kotzur**

$A \wedge B$ (A und B) ; $A \vee B$ (A oder B) ; $\neq$ A (nicht A) ; $A \Rightarrow B$ (Implikation) ; $A \Leftrightarrow B$ (Äquivalenz)
Wahrheitstafel: Alle unterschiedlichen Fälle betrachten! $\forall$:= für alle gilt ; $\exists$:= es existiert ; $\exists!$:= es existiert genau 1

Mengen

Teilmenge: $M \subseteq N$ (enthält immer die leere Menge) ; **Gleiche Mengen**: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$; **Produktmenge**: $A \times B$
Potenzmenge: Obermenge von Mengen, enthält nur Mengen ; **Komplement**: $\Omega \setminus A$ (Alles ohne A)
Vereinigungsmenge: $A \cap B$  ; **Durchschnittsmenge**: $A \cup B$  ; **Differenzmenge**: $A \setminus B$ 
Beweis 2 Mengen gleich: $x \in A \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x \in B$ mit x beliebig oder: $A = B : A \subseteq B$ und B $\subseteq A$ (Bei Kreuzprodukt 2 Elemente)

Relationen

reflexiv	$x \sim x$
symmetrisch	$(x \sim y \Rightarrow y \sim x)$
transitiv	$(x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z)$
antisymmetrisch	$(x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x = y)$
alternativ	$(x \sim y \vee y \sim x)$

Relationen

Äquivalenzrelation:
reflexiv, symmetrisch, transitiv
Ordnungsrelation:
reflexiv, antsymmetrisch, transitiv
Vollständig: zusätzlich alternativ

Funktionen

Injektiv: $f(x1) = f(x2) \Rightarrow x1 = x2$
$\Rightarrow$ Pro Urbild mind. 1 Bild
Surjektiv: $f(M) = N$
$\Rightarrow$ Pro Bild mind. 1 Urbild
Bijektiv: Surjektiv + Injektiv

Gruppe: 1. Abbildung ist assoziativ 2. Abbildung hat neutrales Element 3. Inverses Element 4. Ablsch wenn kommutativ

Induktion

1. **Annahme** aufschreiben 2. **Knotenpunkt finden** (k unter Summe) 3. **Induktionsanfang mit Knotenpunkt** 4. **Zu Zeigen** aufstellen: $n \rightarrowtail n+1$ 5. Eine Seite so umformen, das man die Annahme dastehen hat. Annahme dann anwenden (Tauschen)

Rechengesetze

kommutativ: $a \circ b = b \circ a$ / **assoziativ**: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ / **distributiv**: $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c)$
Neutrales Element: a + 0 = a bzw. a * 1 = a / **Inverses Element**: -a + a = 0 bzw. $(1/a) * a = 1$
Potenzen: $a^x * b^x = (a*b)^x$ / $a^x * a^y = a^{x+y}$ / $(a^x)^y = a^{x*y}$ / $(1/a^x) = a^{-x}$ / $a^{x/y} = \sqrt[y]{x}$

Sinus, Cosinus, Tangens

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
sin	0	0.5	$0.5\sqrt{2}$	$0.5\sqrt{3}$	1	$0.5\sqrt{3}$	0.5	0	-0.5	-$0.5\sqrt{3}$	-1	-$0.5\sqrt{3}$	-0.5	0
cos	1	$0.5\sqrt{3}$	$0.5\sqrt{2}$	0.5	0	-0.5	-$0.5\sqrt{3}$	-1	-$0.5\sqrt{3}$	-0.5	0	0.5	$0.5\sqrt{3}$	1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	/	-$\sqrt{3}$	- $1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	/	-$\sqrt{3}$	-$1/\sqrt{3}$	0

Komplexe Zahlen mit $i^2 = -1$

Kartesisch: $z = a + bi$ Konjugiert: $\bar{z} = (a - bi)$ **Polar**: $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, wobei $\varphi =$**Argument(z)** und $r =$ **Betrag(z)**.
kartetisch $\rightarrowtail$ polar: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\varphi = tan^{-1}(b/a)$ (+180°) wenn 2,3 Quadrant / Polar $\rightarrowtail$ kartetisch: Ausmultiplizieren

Multiplikation (kartesisch): $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$
Add./Subtr. (kartesisch:) $(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$
Division (kartesisch): $(a_1 + b_1 i)/(a_2 + b_2 i) = [(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)]/[(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)]$ bzw. $z1/z2 = (z1/z2) * (\bar{z1}/\bar{z2})$
Multiplikation (polar): $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$
Division (polar): $z_1/z_2 = r_1/r_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$
Potenzieren (polar): $z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$
Wurzelziehen (polar): $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$

Rechenregeln: $|\overline{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ / $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\ Re(z)$ / $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2\ i\ Im(z)$ / $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_2} + \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$
$Im(z^2) = Im(z) * Im(z)$ / $Im(z + z) = Im(z) + Im(z)$ / $Im(i) = 1$ / $Re(i) = 0$
Bemerkung: Linearfaktorzerlegung $\Leftrightarrow$ Nullstellenform: $f(x) = (x - x1) * ... * (x - xn)$
Bemerkung: Zerlegung in ireduzible Faktoren heißt, sich der Nullstellenform anzunähern

Gauß

Typ 1:  , Typ 2:  Lösbar mit einem Wert frei wählen , Typ 3: Eine Gleichung ist falsch $\Rightarrow$ nicht lösbar
Äquivalenzumformung: Zeilentauschen / Multiplikation von Zeilen mit einem Wert x

Polynomdivision

Man teilt ein Polynom durch eine Nullstelle von sich: $(2x^3 - x^2 - x) : (x - 1) = 2x^2 + x$ (für $2x^2$ überlegt man sich, wie oft x multipliziert werden muss damit es x^3 ist. Aus dem Ergebnis lassen sich weitere Nullstellen berechnen.

Vektorraum

Verktoraddition und Skalarmultiplikation sind möglich. Zudem gilt: Vektoraddition ist kommutativ, distributiv, assoziativ und $1 * \vec{x} = \vec{x}$ und $0 * \vec{x} = \vec{0}$ und $\lambda * \vec{0} = \vec{0}$ und $-1 * \vec{x} = -\vec{x}$

Unterraum

Nichtleere Teilmenge in der gilt: $\vec{x} + \vec{y} \in U$ (Vektoradditionsabgeschlossenheit) und $\alpha\vec{x} \in U$ (Skalarmultiplikationsabgeschlossenheit)
Ein notwendiges aber nicht vollständiges Kriterium: Jeder Unterraum enthält den Nullvektor
Tipp: Um zu zeigen, dass eine Struktur ein Vektorraum ist, ist es am einfachsten zu Zeigen, dass er Unterraum eines anderen Vektorraums ist. Dann muss man nur noch die Unterraumeigenschaften beweisen.

Lineare Abhängigkeit

Um zu testen, ob Vektoren Abhängig sind, schreibt man diese als Matrix (von oben nach unten) und setzt diese gleich dem Nullvektor. Gauß anwenden. Wenn Typ 1: Linear unabhängig. Wenn Typ 2 oder 3: Linear Abhängig
Bemerkung: Affiner Raum: Verschiebung eines Vektorraums

Bei Fragen oder Rückmeldung an Julian Kotzur wenden: julian-kotzur@live.de

Spann / Lineare Hülle

Menge aller Linearkombinationen eines Systems von Vektoren eines Vektorraums. Unterräume werden oft in der Form angegeben $U := span\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}\}$.

Homogene LGS:

Ein LGS heißt **homogen**, wenn die rechten Seiten alle gleich null sind. Die Lösungsmenge L_{hom} eines homogenen LGS ist immer ein Unterraum der niemals leer ist, denn $0 \in L_{hom}$. Die Lösungsmenge L eines inhomogenen LGS ist kein Unterraum.

Erzeugendensystem:

$\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ bilden ein EZS eines Vektorraums V, wenn sich jeder Vektor $\vec{x} \in V$ als Linearkombination der $\vec{v_i}$ darstellen lässt. Ein EZS des $\mathbb{K}^m$ muss mindestens m Vektoren umfassen.

Basis:

Ein linear unabhängiges System von (endlich) vielen Vektoren, das ein EZS bildet. Anzahl der Vektoren = Dimension. In einem Vektorraum haben alle Basen die gleiche Länge.

Bestimmung der Basis/Dimension eines Raumes U:

1. Matrix auf Stufenform 2. Die Vektoren die eine Stufe bilden, sind teil der Basis 3. $dim(U)$ = Anzahl der Stufen

Berechnung von $\mathbf{U_1 + U_2}$ und $\mathbf{U_1 \cap U_2}$:

1.Matrix auf Stufenform bringen 2. Dim($\mathbf{U_1 + U_2}$) = Stufenspalten / Dim($\mathbf{U_1 \cap U_2}$) = NichtStufenSpalten

Dimensionsformel für Unterräume

$dim(U_1) + dim(U_2) = dim(U_1 + U_2) + dim(U_1 \cap U_2)$

Lineare Abbildungen

Es gilt: $\forall x, y \in U : f(x + y) = f(x) + f(y)$ und $\forall x \in U, \alpha \in \mathbb{K} : f(\alpha x) = \alpha f(x)$ Zudem gilt: $f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$

Kern und Bild linearer Abbildungen:

$Kern(f) := \{x \in U | f(x) = \vec{0}\} \subseteq U$
$Bild(f) := \{f(x) | x \in U\} = f(U) \subseteq V$

Bild und Kern linearer Abbildungen berechnen

1.Homogenes LGS auf Stufenform bringen
2.Dim(Bild)=Stufenspalten/Dim(Kern)=NichtStufenspalten
3.Kern ist die Lösungsmenge des homogenes LGS
4.Bild ist die Menge der unabhängigen Ausgangsvektoren

Darstellungsmatrix einer lin. Abbildung:

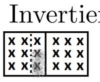
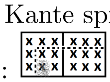
Angabe einer lin. Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch Angabe der Bilder der Standardbasisvektoren in Form einer $m \times n$-Matrix.
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ nie sujektiv und $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ nie injektiv
Injektiv, wenn Kern der Nullvektor.
Sujektiv, wenn rang der Matrix gleich Anzahl der Zeilen
Addition $\Leftrightarrow$ Addition Darstellungsmatrizen
Verkettung $\Leftrightarrow$ Multiplikation Darstellungsmatrizen

Matrizen

Addition und Skalarmultiplikation: wie bei Vektoren
Matrix-Vektor-Mul $\Leftrightarrow$ Matrix-Matrix-Mul
transponierte Matrix: Zeilen mit Spalten vertauschen
Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix}$$

Inverse von Matrizen:

Nur quadratische Matrizen sind invertierbar mit det $\neq 0$!
1. Matrix = Einheitsmatrix setzen und Gauß anwenden
2. Typ 1 Matrix = Invertierbar 3. An unterer Kante spiegeln
4. Gauß auf 1,2,3:  5. Gauß auf 2,3: 
6. Gezielt Multiplizieren, Dividieren, sodass links nur 1er sind
7. Spiegeln $\Rightarrow$ Rechts ist die Inverse Matrix

Formel im Spezialfall n = 2: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Rechenregeln für Matrizen:

$(A + B)^T = A^T + B^T$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	$A + B = B + A$
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$	$(AB)C = A(BC)$	$(A^{-1})^{-1} = A$
$A(B + C) = AB + AC$	$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$	

Rang einer Matrix:

$rang(A) := dim(Bild(A)) = dim(Bild(f))$
Zudem gilt: $rang(A) = rang(A^T)$
Alle Spalten linear unabhängig $\Leftrightarrow$ hat A **vollen Spaltenrang**.

Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{pmatrix}$$

Bei Dreieckmatrizen: Produkt der Diagonaleinträge

Entwicklungssatz von Laplace:

Man nimmt sich eine Zeile und bildet Untermatrizen deren Determinanten man berechnet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \end{matrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Rechenregeln zu Determinanten:

1. Vielfaches auf eine Zeile/Spalte zu addieren, ändert den Wert der Determinanten nicht
2. Zeilen/Spaltentausch ändert die Det. nicht
3. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ A nicht invertierbar / $\det(A) = \det(A^T)$
4. $\det(A^k) = \det(A)^k$ / $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$ mit $\mathbb{R}^{n \times n}$)
5. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ / $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Haufenweise Äquivalenzen:

Für eine lin. Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit Matrix $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ gilt:
f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv
$\Leftrightarrow$ Kern$(A) = \{0\} \Leftrightarrow$ Bild$(A) = \mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow A^{-1}$ existiert $\Leftrightarrow$ rang$(A) = n$
$\Leftrightarrow$ das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ (genau) eine Lösung
$\Leftrightarrow$ die Spalten von A sind l.u. $\Leftrightarrow$ die Zeilen von A sind l.u.
$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A^T) \neq 0$

Spur

Summe der Hauptdiagonalelemente einer quadratischen Matrix

Berechnung von Eigenwerten/Eigenräumen:

1. charakteristisches Polynom berechnen: $p(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$ von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 2. Nullstellen davon berechnen
3. Der **Kern** der Matrizen $A - \lambda_i E_n$ bildet die Basis des Eigenraums (Berechnung mit Gauß)

Hilfestellung: $\dfrac{-b + / - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Beispiel für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \det(A - \lambda E_n) =$

$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 5 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 10 = \lambda^2 - 5\lambda - 6$

Ergebnis: $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = -1$ sind die Eigenwerte von A.

algebraische Vielfachheit:
Vielfachheit der Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms
geometrische Vielfachheit:
Dimension des Eigenraumes Eig(λ_i)
Es gilt: geometrische Vielfachheit$\leq$ algebraische Vielfachheit

Skalarprodukt: $< Zeug >$: $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n$
Vektorlänge: $|Zeug|$: $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_n)^2}$
Orthogonalsystem: Skalarprodukt ist null
Orthonormalsysteme: Orthogonalsystem + Vektorlänge=1

Orthogonalprojektion Berechnung

$\vec{b_n} \in U$, U $\in$ V, $\vec{x} \in V$: $\vec{x}_U = \sum_{i=1}^{m} < \vec{x}, \vec{b_i} > \vec{b_i}$

Orthnormalbasisberechnung

Man nimmt sich unabhängige Vektoren, bsp. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
1. Vektoren $\vec{a}$ normieren: $\vec{u_1} = (1/|\vec{a}|) \cdot \vec{a}$
2. $\vec{u_2} = \vec{b} - < \vec{b} \cdot \vec{u_1} > \cdot \vec{u_1}$. Dann $\vec{u_2}$ normieren.
3. $\vec{u_3} = \vec{c} - < \vec{c} \cdot \vec{u_2} > \cdot \vec{u_2} - < \vec{c} \cdot \vec{u_1} > \cdot \vec{u_1}$. Dann $\vec{u_3}$ normieren
Bemerkung: Vektoren normiert man, indem man ihre Werte durch ihre Länge teilt.