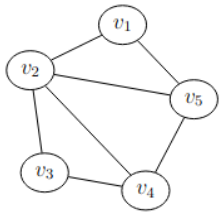
Effiziente kombinatorische Algorithmen - Zusammenfassung

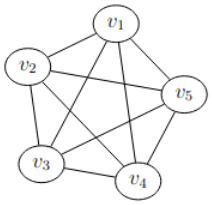
Autoren: Linda Schneider und Julian Kotzur

Grundlagen

Definition (Graphen)**.**
Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine endliche Menge und $E \subseteq P_2(V) = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Dann heißt das geordnete Paar $G = (V, E)$ (endlicher, schlichter, ungerichteter) **Graph**, wobei V die **Knotenmenge** und E die **Kantenmenge** von G ist. Ist $e = \{u, v\} \in E$ so sind u und v **benachbart** (adjazent). $e = \{u, v\}$ oder auch $u \overset{e}{-} v$ ist dabei eine Kante.



(a) Einfacher Graph



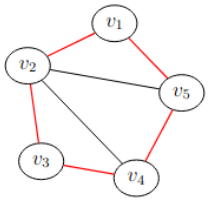
(c) Vollständiger Graph K_5

Definition (Grad)**.**
Der **Grad eines Knoten** in $G = (V, E)$ ist die Anzahl an benachbarten Knoten. Der **Grad eines Graphen** entspricht dem maximalen Grad eines enthaltenen Knotens

Definition (Regulär)**.**
Alle Knoten eines Graphen haben den gleichen Grad

Definition (Teilgraph)**.**
Seien G und H Graphen. H heißt **Teilgraph** von G, falls $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$ gilt.

Definition (Wege und Kreise)**.**
Ein **Weg** ist eine Folge von Kanten. Ein **einfacher Weg** besucht keine Knoten doppelt. Ein **Kreis** ist ein einfacher Weg, wobei Anfangs- und Endknoten äquivalent sind. Ein **einfacher Kreis** besucht keine Knoten mehrfach

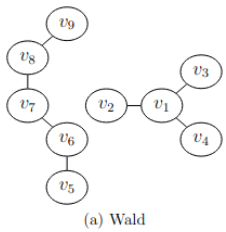


(b) Einfacher Kreis im Graphen

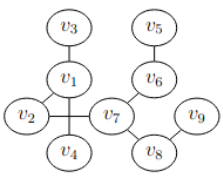
Definition (Zusammenhängend)**.**
Graph $G = (V, E)$ heißt **zusammenhängend** (zhgd), falls zwischen je zwei Knoten Knoten $u, v \in V$ ein Weg existiert

Definition (Wald)**.**
Graph $G = (V, E)$ ist ein **Wald**, falls G keine einfachen Kreise enthält

Definition (Baum)**.**
Graph $G = (V, E)$ ist ein **Baum**, falls G ein zusammenhängender Wald ist



(a) Wald



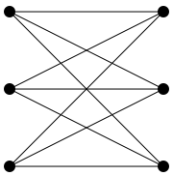
(b) Baum

Satz (Grad und Knoten)**.**
Bei allen Graphen $G = (V, E)$ gilt der Zusammenhang:

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = 2 \cdot |E|$$

Definition (Disjunktionen)**.**
Zwei Graphen sind disjunkt, wenn es keine Wege von dem einen Graph in den anderen Graphen gibt. Zwei Wege sind disjunkt, wenn es keinen Knoten gibt, der in beiden Wegen enthalten ist

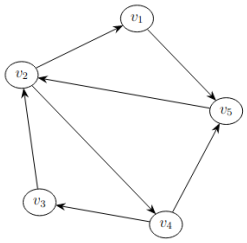
Definition (Bipatiter Graph)**.**
Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, falls sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen A und B aufteilen lassen, sodass zwischen den Knoten innerhalb beider Teilmengen keine Kanten verlaufen.



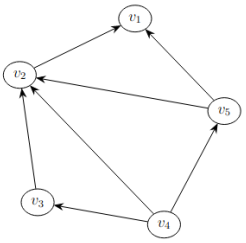
Definition (Gerichteter Graph)**.**
$G = (V, E)$ ist ein **gerichteter Graph** oder auch Digraph, wenn $V = \{v_1, ..., v_n\}, E \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) \mid v \in V\}$. $d_G^+(v) = |\{e \in E \mid e = (v, w) = v \overset{e}{\to} w\}|$ heißt **Ausgangsgrad**. $d_G^-(v) = |\{e \in E \mid e = (v, w) = w \overset{e}{\to} v\}|$ heißt **Eingangsgrad**

Definition (Zusammenhängende Digraphen)**.**
Digraph $G = (V, E)$ heißt **stark zusammenhängend**, falls für je zwei Knoten $u, v \in V$ gilt: Es gibt einen einfachen Weg von u nach v und von v nach u. Falls G ungerichtet zusammenhängend ist, ist G **schwach zusammenhängend**

$\to$ ein ungerichteter Graph kann zu einem gerichteten werden, indem man $u - v$ zu $u \to v$ und $v \to u$ macht



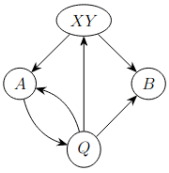
(a) Stark zusammenhängend



(b) Schwach zusammenhängend

Satz (Grade und Knoten von Digraphen)**.**
Die Summe von Ausgangsgraden ist gleich der Summe der Eingangsgrade und gleich der Anzahl an Kanten

Graphen Repräsentation:



Inzidenzliste:
$A :\to Q \to$
$XY :\to A \to B \to$
$B :\to$
$Q :\to A \to B \to$
$\to XY \to$

Adjazenzmatrix:

	A	B	Q	xy
A	0	0	1	0
B	0	0	0	0
Q	1	1	0	1
xy	1	1	0	0

Depth-First-Search

Algorithmus 1 Algorithmisches Schema zum Durchsuchen

1: Starte in beliebigen Knoten $s \in V$
2: $\mathcal{S} = \{s\}$
3: Markiere alle Kanten $e \in E$ als *unbenutzt*
4: **while** $\exists$ *unbenutzte* Kante e von $u \in \mathcal{S}$ nach v **do**
5: Wähle Knoten u und *unbenutzte* Kante e
6: $\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \{v\}$
7: Markiere e als *benutzt*

→ Durchsuchen eines Digraphen, da algorithmisches Schema für ungerichtete Graphen äquivalent ist.

Lemma. Gestartet in s gilt für Knoten in $\mathcal{S}$ nach Terminierung:

$$\mathcal{S} = \{v \in V \mid \text{Es gibt einen Weg von s nach v}\}$$

Beweis:
„⇒ “$(\forall v \in S \Rightarrow s \to v)$: Offensichtlich nach Konstruktion.
„⇐“ : Annahme: $v \in V$ und v ist von s aus erreichbar.
⇒ Zu zeigen: $v \in \mathcal{S}$, also: $\forall v \in V \wedge \exists s \to v \Rightarrow v \in S$
→ Da v von s erreichbar existiert ein Weg von s nach v.
→ Durch Induktion wird gezeigt, dass alle Knoten dieses Weges in $\mathcal{S}$ liegen.
IA: $i = 0,\ v_0 = s \in \mathcal{S}$ **UND** [IV:] $v_i \in \mathcal{S}$
IS: $v_i \in \mathcal{S} \Rightarrow v_{i+1} \in \mathcal{S}$
→ Beweis durch Widerspruch, daher $v_i \in \mathcal{S}$ und $v_{i+1} \notin \mathcal{S}$.
⇒ Nach Terminierung wäre Kante zwischen $v_i,\ v_{i+1}$ *unbenutzt* , was ein Widerspruch zur Abbruchbedingung der while-Schleife wäre.

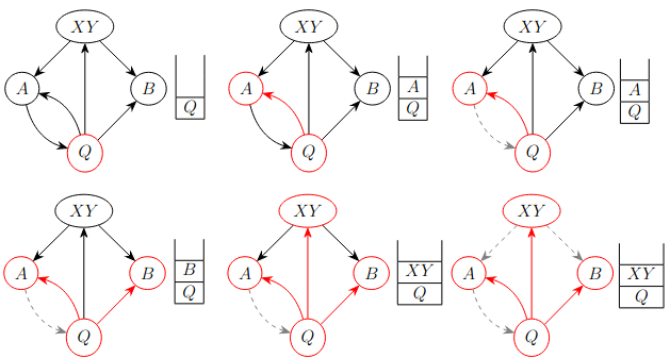
□

Detailliertere Beschreibung des Schemas:
- Kodierung des Graphen: Durch Inzidenzliste mit Speicherplatz $\mathcal{O}(|V|+|E|)$ oder Adjazenzmatrizen mit Speicherplatz $O(|V|^2)$
- Darstellung $\mathcal{S}$: Array mit $\mathcal{S}[v] \in \{$ *besucht* , *nichtbesucht* $\}$.
- Reihenfolge von $u \in \mathcal{S}$: Auswahl mittels *Keller* und Inzidenzliste in Verbindung mit den Knotenmarkierungen.

Algorithmus 2 Algorithmisches Schema für DFS (gerichtet)

1: Starte in beliebige Knoten $s \in V$.
2: **for** $v \in V$ **do**
3: **if** $v \neq s$ **then** $\mathcal{S}[v] =$ *nichtbesucht*
4: **else** $\mathcal{S}[v] =$ *besucht*
5: Lege s auf *Keller*
6: **while** *Keller* nicht leer **do**
7: Nimm obersten Knoten u vom *Keller*
8: **if** Es gibt *unbenutzte* Kante $u \xrightarrow{e} v$ **then**
9: Markiere e als *benutzt*
10: Lege u zurück auf den *Keller*
11: **if** $\mathcal{S}[v] =$ *nichtbesucht* **then**
12: $\mathcal{S}[v] =$ *besucht*
13: Lege v auf *Keller*

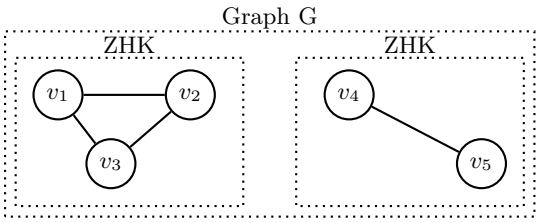
⇒ **Laufzeit**: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
⇒ Tiefensuche zerlegt Baum in maximale ZHK



⇒ gestrichelte Linien sind Kanten ohne neuen Knoten

DFS für ungerichtete Graphen und Berechnung der 2fachen ZHK

Definition ((Maximale) Zusammenhangskomponente)**.**
Ein Teilgraph H von G heißt **maximale ZHK**, falls H zhgd. ist und H disjunkt zu allen Knoten in $G \setminus \{H\}$ ist



→ G sei im Folgenden immer ein zhgd. Graph.
→ Besuchreihenfolge wird in Array *dfnr* gespeichert
→ Benutzte Kanten werden ohne Richtung in $T \subseteq E$ gespeichert. (für Tiefensuchbaum)
→ In B werden unbenutzte Rückkanten gespeichert.

Algorithmus 3 DFS_u: Tiefensuche in ungerichteten Graphen

1: **procedure** SUCHE(v)
2: $dfnr[v] = zaehler,\ zaehler++$ ▷*Setze dfnr des Knotens*
3: Markiere v als *besucht* .
4: **for** $\forall$ Knoten $w \in L[v]$ **do** ▷*Knoten aus Inzidenzliste*
5: **if** $w =$*nichtbesucht* **then**
6: $T = T \cup (v, w)$ ▷*Füge Kante zu Tiefenbaum*
7: Suche(w) ▷*Suche von w aus*
8:
9: $T = \emptyset,\ zaehler = 1$ ▷*Starte Algorithmus*
10: **for** $\forall v \in V$ **do** ▷*Initialisierung des Graphen*
11: Markiere v als *nichtbesucht* .
12: Wähle $r \in V$. ▷*Wähle Wurzel*
13: Suche(r). ▷*Starte Suche von Wurzel aus*
14: **return** $T, r, dfnr$

⇒ **Laufzeit**: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
→ Korrektheit des Algo kann über Rückkanten geprüft werden.
⇒ Rückkanten springen innerhalb eines Astes, nicht zw. Ästen!
⇒ Rückkanteneigenschaft gibt es bei Breitensuche nicht!

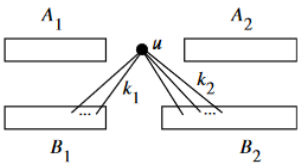
Lemma (Korrektheit des Algorithmus)**.**
DFS_u berechnet eine Zerlegung von E in T und $B = E \setminus T$ mit
1. Ergebnis $H = (V, T)$ ist Baum mit Wurzel $r : dfnr[r] = 1$.
2. Ist $(v \xrightarrow{e} w) \in B$, so ist v in H Nachfolger von w.

Beweis:
→ 1. Gilt, da Knoten nicht mehrfach besucht werden und somit kein Kreis entstehen kann
→ Wenn 2. falsch wäre, wäre v bis und beim Durchlauf von $L[w]$ nicht betrachtet worden, was per Konstruktion unmöglich ist.

Definition (Artikulationspunkt AP)**.**
Ein Knoten $v \in V$ heißt Artikulationspunkt (AP) von G, falls es zwei Knoten gibt, deren Verbindung immer über den Knoten v läuft. (Wurzel ist AP, falls sie mehr als einen Ast besitzt)
⇒ Entfernt man AP, so zerfällt Graph in min. 2 Graphen/ ZHK

Definition (Zweifach Zusammenhängend)**.**
G heißt zweifach zusammenhängend, wenn G keinen AP besitzt.

Beispiel. (Reguläre, bipartite Graphen)
Ist G ein zusammenhängender, regulärer, bipartiter Graph von Grad k, so muss G aufgrund der Regularität zweifach Zusammenhängend sein. Würde ein AP existieren, so hat man $k|A_1|$ Kanten nach B_1, aber nur $k|B_1| - k_1$ Kanten nach A_1.



Definition (Zweifache Zusammenhangskomponente).
Sei $V' \subseteq V$ und $G' = G|_{V'}$. G' heißt zweifache Zusammenhangskomponente, falls G' zweifach zusammenhängend ist und es keine größere Teilmenge von V gibt, welche zweifach zusammenhängend ist und V' enthält.

Grundidee zum Finden aller 2fachen ZHK eines Graphen:
1. Enthält G keinen AP, so ist G zweifach zusammenhängend.
2. Ist v ein AP, so besteht $G \setminus v$ aus zhgd Teilgraphen G_i. Wende 1. auf diese G_i an.

→ **Zusatzvariable** $tief[v]$: Kleinste Zahl $dfnr[u]$, die in H über einen gerichteten Weg im Baum von v nach u erreichbar ist gefolgt von höchstens einer Rückkante.
→ Dabei gilt immer $tief(v) \leq dfnr(v)$

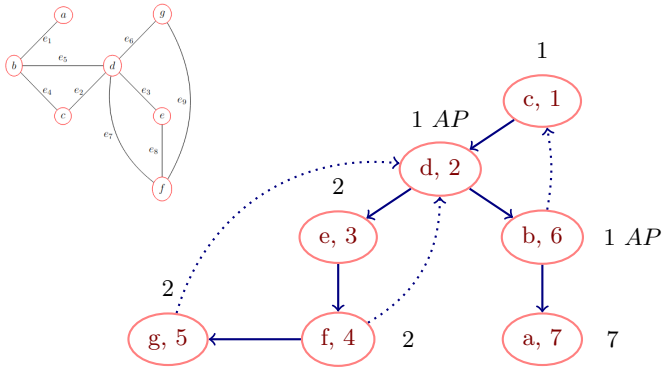
Lemma (Hinreichende Bedingung zum Finden von AP).
Gegeben sei B, T, R von DFS_u. Falls Baumkante $(u \to v) \in T$ mit $dfnr[u] > 1$ und $tief(v) \geq dfnr[u]$ existiert, so ist u ein AP.

Beweis:
→ Sei $S \setminus \{u\}$ Menge der Knoten in $H = (V, T)$ auf dem Weg von Wurzel r zu Knoten u UND V_v sei Menge der Knoten die zu dem Teilbaum gehören, der an v hängt.
→ Aus Lemma 1: Wegen Ast-Eigenschaft gibt es keine Kanten, die zwischen V_v und $V \setminus \{\mathcal{S} \cup \{u\} \cup V_v\}$ verlaufen.
⇒ Wäre u kein AP, dann gäbe es einen Weg von v über Kanten zu einem Knoten $v' \in V_v$ und von dort aus zu einem Knoten $w \in \mathcal{S}$ geben.
⇒ $tief(v) \leq dfnr[w] < dfnr[u]$ ↯ ($tief$-Nr. wäre falsch) □

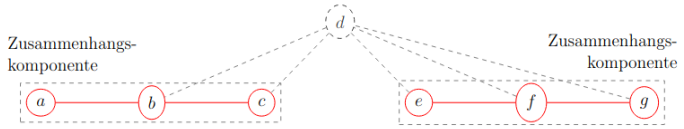
Lemma (Notwendige Bedingung, erfüllt jeder AP).
Gegeben sind B, T, r von $DFS_u(G)$. Sei u ein AP von G mit $u \neq r$. Dann gibt es Baumkante $(u \to v) \in T$ mit $tief(v) \geq dfnr[u]$.

Beweis:
→ $G \setminus \{u\}$ besteht aus ZHK $G_1, \ldots, G_m,\ m \geq 2$.
⇒ Jeder Weg zwischen den ZHK führt über u.
→ Sei oBdA. $r \in V(G_1)$.
⇒ Jede Suche von DFS_u gelangt über Baumkanten von $r \to u$.
⇒ Sei $(u \to v)$ erste solche Baumkante mit $v \in V(G_2)$.
⇒ Da es keine Kanten zwischen $V(G_2)$ und $V \setminus \{V(G_2) \cup \{u\}\}$ gibt, gilt $tief(v) \geq dfnr[u]$. □

Beispiel: DFS_u mit $tief[v]$ und AP gestartet in c



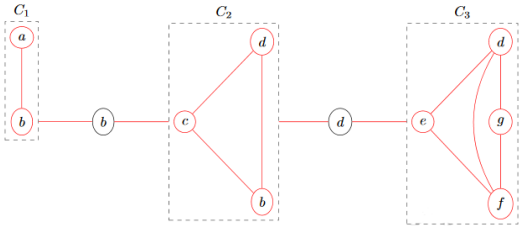
→ Neben Knoten sind $tief$-Nummern
→ In Knoten sind $dfnr$-Nummern
⇒ Baum zerfällt in (maximale) Zusammenhangskomponenten, wenn man AP entfernt:



Definition (Superstrukturgraph).
Sei G ein zhgd. Graph. Seien u_i APs und C_j zweifache ZHK von G. Dann ist $\bar{G}$ Superstrukturgraph von G mit den Eigenschaften:

$$V(\bar{G}) = \{u_i \mid i = 1, \ldots, p\} \cup \{C_j \mid j = 1, \ldots, m\} \text{ und}$$
$$E(\bar{G}) = \{u_i - C_j \mid u_i \in C_j\}$$

⇒ Zu zusammenhängenden Graphen ist der zugehörige Superstrukturgraph ein Baum!
⇒ $\bar{G}$ hat min 2 Blätter, Blätter sind 2-fache ZHK von G.
⇒ Ist C 2-fache ZHK, die Blatt in $\bar{G}$ ist, so ist C mit Restgraph durch genau einen AP verbunden.



Wichtig für DFS_u: Am Ende zusätzlicher Fall: Wurzel als AP! Idee: $tief$ und $dfnr$ werden während rekursivem DFS erzeugt und damit AP erkannt. Mit Kellern und AP werden dann 2ZHK ausgegeben. Ergebnis: Alle 2ZHK und Superstrukturgraph

Algorithmus 4 DFS-2ZK

```
1:  ▷Besichtigte-Knoten und Besichtigte-Kanten sind Keller
2:  procedure SUCHE(v)
3:    tief(v) = dfnr[v] = zaehler, zaehler++
4:    Markiere v als besucht
5:    for ∀ w ∈ L[v] do                    ▷Knoten in Inzidenzliste
6:      if w = nichtbesucht then
7:        T = T ∪ (v → w)
8:        vater[w] = v                     ▷Hierarchie merken
9:        Lege w auf Besichtigte-Knoten
10:       (v → w) auf Besichtigte-Kanten
11:       Suche(w)                         ▷Suche in Knoten weiter (rekursiv)
12:       if tief(w) ≥ dfnr[v] und v ≠ r then
13:         Gib 2ZHK aus: Alles über w und w. Lösche dies
    danach. Zudem v und lösche nur v → w (nicht v)
14:       tief(v) = min{tief(v), tief(w)}
15:     else if w ≠ vater[v] und dfnr[v] > dfnr[w] then
16:       ▷Wir haben eine Rückkante von v nach w gefunden
17:       Lege (v → w) auf Besichtigte-Kanten
18:       tief(v) = min{tief(v), dfnr[w]}
19: Start von DFS-2ZK:
20: T = ∅, zaehler = 1
21: for ∀v ∈ V do
22:   Markiere v als nichtbesucht
23: Wähle Wurzel r ∈ V und starte Suche(r)
24:           ▷Sonderfall: r ist Wurzel abschließend behandeln
25: while Besichtigte-Kanten nicht leer do
26:   Gib alle Kanten auf Besichtigte-Kanten bis (r → v) ∈ T
27:   Gib alle Knoten von Besichtigte-Knoten bis v und r aus
28:   Lösche Ausgabe, bis auf r, vom Keller
```

→ **Laufzeit**: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.
⇒ Alles außer DFS hat konstanten Aufwand und fällt weg
⇒ Man muss Kanten und nicht Knoten betrachten! Je Kante im Baum gibt es konstanten Aufwand an beiden Enden.
→ An einer Seite wird verzögert ein min für tief berechnet
→ Auf der anderen Seite: besucht oder dfnr = dfnr+1
→ Keller pop() hat auch Konstante Laufzeit

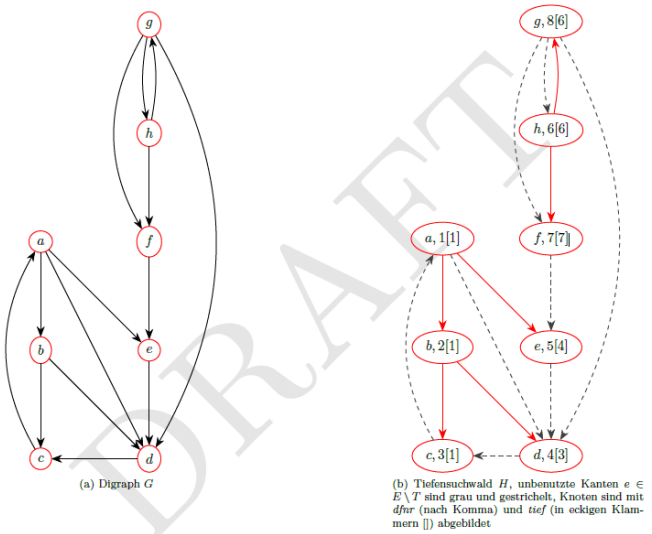
Definition (Brücke).
Eine Kante $e \in E$ heißt Brücke, wenn $G' = (V, E \setminus \{e\})$ mehr maximale Zusammenhangskomponenten hat als G.

Lemma (Brücken und 2fache ZHK).
Die Brücken eines Graphen G sind genau die Kanten derjenigen 2fachen ZHK, welche nur aus genau zwei Knoten bestehen.

→ Erkennbar im Algorithmus: $(u, v) \in T$ und $dfnr[v] = tief(v)$

DFS für Digraphen - Schnelle Berechnung der starken Zusammenhangskomponente

Wichtig: Es ist folgende Schleife in DFS einzufügen (wg. Wald):
while $\exists$ *nicht-besuchte Knoten* $r \in V$ *do:* *suche(r)*
$\Rightarrow$ DFS berechnet zu G den Tiefensuchwald H:



(a) Digraph G

(b) Tiefensuchwald H, unbenutzte Kanten $e \in E \setminus T$ sind grau und gestrichelt, Knoten sind mit *dfnr* (nach Komma) und *tief* (in eckigen Klammern []) abgebildet

Abb. 1: Suche wird bei a und h gestartet

DFS produziert 4 Kantentypen:

1. Kanten aus T sind **Baumkanten** und führen zu neu gesuchten Knoten (rote Kanten)
2. **Vorwärtskanten:** Kanten $(a \to d) \in E \setminus T$ mit Weg in H.
3. **Rückkanten:** Kanten $(g \to h) \in E \setminus T$ mit $g \to \ldots \to h$ ist Weg in H. ($\Rightarrow$ Bsp: c $\to$ a, g $\to$ h)
4. **Crosskanten:** Kanten $(u \to v) \in E \setminus T$, wobei es in H weder einen Weg von u nach v noch von v nach u gibt.
   $\Rightarrow$ Ist u $\to$ v eine Crosskante, so gilt: $dfnr[u] > dfnr[v]$.
   $\Rightarrow$ Bsp: d $\to$ c, e $\to$ d, g $\to$ f, f $\to$ e, g $\to$ d, g $\to$ f

Definition (Starke Zusammenhangskomponente)**.**
$u \sim v \Leftrightarrow$ In G gibt es einen Weg von u nach v und andersherum. Sei $V_1, \ldots, V_k$ eine Zerlegung von V unter $\sim$ in die Äquivalenzklassen. Dann heißen die durch die V_i induzierten Teilgraphen G_i starke Zusammenhangskomponente von G.

Einschub Äquivalenzrelation:
$\to$ Reflexiv: Es gilt axiomatisch $v \sim v$, Symmetrie: $v \sim u \Rightarrow u \sim v$, Transitiv: $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$

Definition (Superstrukturgraph)**.**
Seien $C_1, \ldots, C_k$ starke Zusammenhangskomponenten von G. Dann heißt der Digraph $\tilde{G}$ mit $V(\tilde{G}) = \{C_1, \ldots, C_k\}$ und $E(\tilde{G}) = \{C_i \to C_j \mid i \neq j$, falls $\exists$ Kanten zwischen i und j$\}$ der Superstrukturgraph von G.

$\Rightarrow$ **Fakt:** $\tilde{G}$ ist ein kreisfreier Graph (**D**irected **A**cyclic **G**raph)

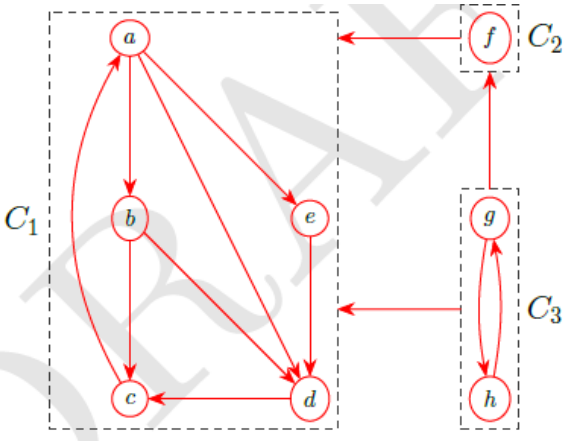


Abb. 2: Superstrukturgraph zu Abbildung 1

Übung:

Beispiel (Ist die Sprache endlich?)**.**
Suche in Automat S-ZHK. Für Komponenten mit ≥ 2 Zustände muss jeweils Endzustand enthalten sein, da man sonst endlose Zyklen haben kann und die Sprache unendlich wäre.

Beispiel (Brückenlos und starke ZHK)**.**
Aufgabe: Mache aus brückenlosen, ungerichteten, zusammenhängendem Graphen eine starke ZHK
$\to$ Führe Tiefensuche durch und merke Baum- und Rückkanten
$\to$ Da G brückenlos: $\nexists u \in V \setminus \{r\} : dfnr[u] = tief(u)$
$\to$ Auch Wurzel muss also über Rückkante erreichbar sein!
$\Rightarrow$ Erstelle gerichteten Kreis für Kriterium der starke ZHK

Meta-Vorgehen von DFS im Superstrukturgraphen:
$\to$ Start in Knoten r in ZHK C_1: Wird C_1 verlassen, ehe C_1 vollständig durchsucht ist $\Leftrightarrow d^+_{\tilde{G}}(C_1) \geq 1$.
$\to$ In diesem Fall gelangt DFS zur nächsten starken ZHK, bis eine ZHK C_k mit $d^+_{\tilde{G}}(C_k) = 0$ erreicht ist.
$\Rightarrow$ Diese muss es geben, da $\tilde{G}$ ein DAG ist.
$\to$ C_k wird vollständig durchsucht, bevor es rückwärts wieder verlassen wird.

Identifizieren von ZHK mittels neuer tief-Zahl:
$\to$ tief(v) ist die kleinste Zahl $dfnr[u]$ eines Knotens u, der in der selben starken ZHK wie v liegt und erreichbar ist von v aus auf einem Weg über Baumkanten, gefolgt von **höchstens** einer Rück- oder Crosskante!
$\Rightarrow$ Induktives Berechnungsschema für tief im Tiefensuchwald:

1. $v \in V : d^+_{\tilde{G}}(v) = 0$:
$$tief(v) = \min(\{dfnr[v]\} \cup \{dfnr[u] \mid v \to u \text{ Rück- oder Crosskante}, u \text{ in gleicher ZHK wie } v\})$$
2. $v \in V : d^+_{\tilde{G}}(v) \geq 1$:
$$tief(v) = \min(\{dfnr[v]\} \cup \{dfnr[u] \mid v \to u \text{ Rück- oder Crosskante}, u \text{ in gleicher ZHK wie } v\} \cup \{tief(u) \mid (v \to u) \in T\})$$

Algorithmus 5 DFS-SZK

```
1:  procedure S(v)
2:      tief(v) = dfnr[v] = zaehler,  zaehler++
3:      Markiere v als besucht.
4:      Lege v auf Keller K, auf_Keller[v] = true.
5:      for ∀ w ∈ L[v] do                ▷Knoten in Inzidenzliste
6:          if w = nicht_besucht then
7:              S(w), tief(v) = min{tief(v), tief(w)}
8:          else if  w = besucht und auf_Keller[w] then
9:              tief(v) = min{tief(v), dfnr[w]}
10:     if tief(v) = dfnr[v] then
11:         while auf_Keller[v] do
12:             Nimm obersten Knoten x vom Keller K.
13:             Gebe x aus.
14:             auf_Keller[x] = false
15:         „Ende der SZK “.
16:
17: zaehler = 1,  K = ∅.
18: for v ∈ V do
19:     Markiere v als nicht-besucht.
20:     Setze auf_Keller[v] = false.
21: while ∃ nicht besuchter Knoten r ∈ V do S(r)
```

Lemma (Finden SZK)**.**
Sei t der erste Knoten, der an der rot markierten Stelle die if-Bedingung erfüllt. Dann bilden genau die Knoten oberhalb von t (inkl. t) auf dem Keller K eine SZK.

Beweis:

1. Von t aus sind alle Knoten auf K oberhalb von t über Baumkanten erreichbar, da Suche von t aus zu diesem Zeitpunkt beendet ist.
2. zz. Ist v von t aus über Baumkanten erreichbar, und v auf K, so gibt es einen Weg von v zu t. Konstruktion:
   → Ist die Suche von t aus beendet, so ist auch die Suche von v aus beendet.
   ⇒ $dfnr[v] > tief(v) \geq tief(t) = dfnr[t]$.
   → Sei Knoten u mit $dfnr[u] = tief(v)$.
   → Ist $u = t$, so sind wir fertig.
   → Ansonsten ist u auf K oberhalb von t und es gibt gerichteten Weg von v nach u und wir argumentieren für u genau wie für v.
   ⇒ Es ergibt sich ein Weg in G von v nach t.
   ⇒ 1.+ 2. ⇒ Alle Knoten oberhalb von t liegen auf SZK.
3. zz. C enthält keine weiteren Knoten.
   Annahme: C enthält y, der nicht oberhalb von t auf K liegt.
   ⇒ $dfnr[y] < dfnr[t]$
   → Alle Knoten $y \in V(C)$, die nicht über t auf K liegen, haben diese Eigenschaft.
   → Mindestens ein solcher Knoten y' ist über Rück- oder Crosskanten erreichbar.
   ⇒ $x \to y'$ von x oberhalb von t auf K.
   → Da $x, y', t \in V(C)$ sind, gilt
   $$tief(t) \leq tief(x) \leq dfnr[y'] < dfnr[t] \quad \lightning$$

□

Satz (Laufzeit)**.**
Der Algorithmus berechnet in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ die starken Zusammenhangskomponenten.

→ Nach vorherigem Lemma wird immer korrekt eine starke ZK berechnet!
→ Die starken ZK werden in umgekehrt topologischer Reihenfolge der Knoten im Superstrukturgraph ausgegeben.
⇒ Der Digraph G ist genau dann ein DAG, wenn alle seine starken ZK aus genau einem Knoten bestehen.

Flüsse in Netzwerken

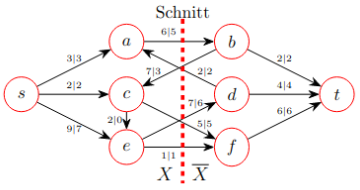
Definition (Kombinatorisches Optimierungsproblem)**.**
Kombinatorische Optimierungsprobleme Π sind durch 4 Komponenten charakterisiert:

1. Domain D: Menge der Instanzen/Eingaben
2. S(I) für $I \in D$: Menge der zu I zulässigen Lösungen
3. Bewertungsfunktion $f : S(I) \to \mathbb{N}$
4. $ziel \in \{min, max\}$

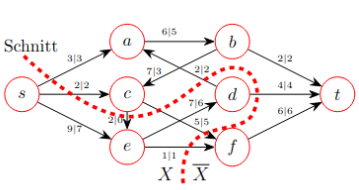
Gesucht ist zu $I \in D$ eine zulässige Lösung $\sigma_{opt} \in S(I)$, so dass $OPT(I) = f(\sigma_{opt})$ der Wert einer optimalen Lösung ist

Definition (Flussproblem)**.**
Ein Netzwerk N ist ein Digraph G mit einer Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{R}^+$ und zwei besonderen Knoten s (Quelle) und t (Senke). $c(e)$ mit $e \in E$ ist Kapazität. Wir schreiben $N = (G, s, t, c)$.

→ **Fluss:** Funktion f die Kanten (reellen) Wert zuweist. Es gilt $0 \leq f(e) \leq c(e)$ und für Wert der Rückkanten $f(\overleftarrow{e}) = -f(e)$
→ **Konservierungsgesetz**: Gilt für Flüsse und Kanten \ s,t: In = Out: $\forall v \in V \backslash s, t : \sum_{u:u\to v} f(u \to v) = \sum_{u:v\to u} f(v \to u)$
→ **Wert des Flusses:** Alles was aus der Quelle rausfließt, minus das was wd. reinfließt. Definition auch bei Senke, möglich, wg. Konservierungsgesetzt.
→ **s,t-Schnitt:** Menge an Kanten zw. 2 Partitionen S und $V \backslash S$
⇒ Eine Seite hat immer s und die andere immer t
⇒ Die Kapazität des Schnittes ist gleich der Summe der Kapazität der Kanten, die von S nach $V \backslash S$ führen
⇒ Wichtige Eigenschaft für den Wert eines Schnittes gilt:
$|f| = f(S, V \backslash S) - f(V \backslash S, S) \leq f(S, V \backslash S) \leq c(S, V \backslash S)$



(a) Schnitt $X, \overline{X}$
$c(X, \overline{X}) = 6 + 7 + 5 + 1 = 19$
$\geq f(X, \overline{X}) = 5 + 6 + 5 + 1 = 12 \geq |f|$
$c(\overline{X}, X) = 7 + 2 = 9 \geq f(\overline{X}, X) = 3 + 2 = 5$
$|f| = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) = 17 - 5 = 12$

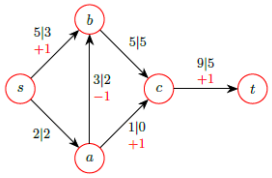


(b) Schnitt $X, \overline{X}$
$c(X, \overline{X}) = 3 + 2 + 2 + 4 + 1$
$= f(X, \overline{X}) = 3 + 2 + 2 + 4 + 1 = 12 = |f|$
$c(\overline{X}, X) = 2 \geq f(\overline{X}, X) = 0$
$|f| = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) = 12 - 0 = 12$

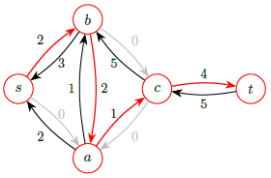
Definition (Erweiternder Weg)**.**
Ein Weg von s nach t über Kanten aus $E \cup \overleftarrow{E}$ heißt erweiternder Weg p bezüglich f, falls

1. für jede Kante e auf p mit $e \in E : f(e) < c(e)$.
2. für jede Rückkante $\overleftarrow{e}$ auf p mit $e \in E : f(e) > 0$

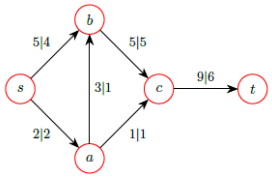
→ Verbesserung durch erweiternden Weg: Finde Weg p, suche schmalste Stelle und verbessere Weg um diesen Wert!



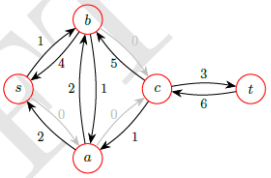
(a) Netzwerk mit einem vorhandenem Fluss und Erweiterungsmöglichkeit



(b) Residualgraph mit erweiterndem Weg

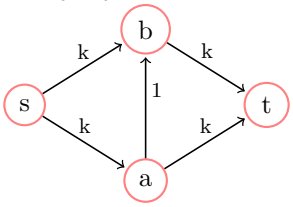


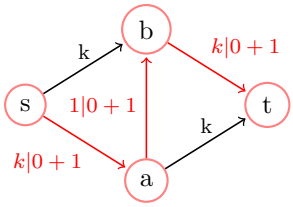
(a) Netzwerk mit maximalem Fluss



(b) Residualgraph (Es ist kein erweiternder Weg vorhanden)

→ Bemerke: Bei reellen Kantenkapazitäten kann es passieren, dass es unendliche viele erweiternde Wege gibt und man somit nie auf den maximalen Fluss kommt
(weil man die Zahlen beliebig gut approximieren kann)
→ Bemerke: Folgendes Netzwerk hat eine exponentielle Laufzeit (worst case), da 2k erweiternde Wege gefunden werden können:





→ Bemerke: Rückkanten nach s oder aus t können nicht zur Gewinnung des maximalen Flusses beitragen.

Satz (Ford/Fulkerson)**.**

1. Satz über erweiternde Wege
   f ist max Fluss auf N ⇔ In N gibt es keine erweiternden Wege bzgl. f.
2. Max-Flow-Min-Cut-Theorem
   Der maximale Wert eines Flusses ist gleich der minimalen Kapazität eines s,t-Schnittes.

Beweis:
„⇒ “: Enthält N erweiternden Weg bzgl. f, so ist f gemäß unseres Vorgehens noch verbesserbar und war f nie maximal
„⇐ “: Angenommen ∄ erweiternden Weg bezüglich f
→ Jede Berechnung eines erweiternden Wegs endet in v mit:
⇒ Im Residualgraphen gibt es einen Weg von s nach v und $v \neq t$
⇒ Alle Kanten die von v starten sind max
⇒ Oder alle Kanten die in v enden sind 0

→ Formal: Aufteilen der Knotenmenge in zwei Partitionen: $X = \{s\} \cup \{u \in V \mid \exists$erweiternder Weg von s nach v$\}$, $\bar{X} = V \setminus X$
⇒ $|f| = f(X, \bar{X})$= Summe der Flüsse von X nach $\bar{X} = c(X, \bar{X})$
→ Dies Beweist auch (2), da nach der Eigenschaft für s,t-Schnitte der Wert aller anderen Schnitte größer gleich $c(X, \bar{X})$ ist

□

→ Integrality Theorem: Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, so gibt es auch immer einen ganzzahligen Fluss.
⇒ Gestartet mit dem leeren Fluss ist immer ein ganzzahliger erweiternder Weg möglich!

Algorithmus von Dinic

→ Insgesamte Laufzeit: $\mathcal{O}(|V|^2|E|)$
→ Restkapazität $\tilde{c}(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & falls\ e \in E \\ f(e) & falls\ e \in \overleftarrow{E} \end{cases}$
→ Kanten mit $\tilde{c}(e) > 0$ heißen **nützliche Kanten**.
⇒ Erweiternde Wege bzgl. f enthalten nur nützliche Kanten!
→ f heißt **Sperrfluss**, falls es keinen erweiternden Weg gibt der nur Kanten aus E (also keine aus $\overleftarrow{E}$) enthält
→ $\tilde{\delta}(v)$ = Anzahl Kanten eines kürzesten Weges von s zu v über nützliche Kanten.
⇒ Existiert kein solcher Weg, so ist $\tilde{\delta}(v) = \infty$

Definition (Geschichtetes Netzwerk)**.**
Geschichtete Netzwerk $\tilde{N}(f) = ((\tilde{V}, \tilde{E}), s, t, \tilde{c})$ zu N,f mit

- $\tilde{V} = \{v \in V \mid v$ ist auf kürzestem erweiterndem Weg von s nach t, $\tilde{\delta}(v) \leq \tilde{\delta}(t)\}$
- $\tilde{E} = \{e = (u, v) \in E \cup \overleftarrow{E} \mid e$ ist nützliche Kante mit Knoten in $\tilde{V}$, $\tilde{\delta}(v) = \tilde{\delta}(u) + 1\}$
- $\tilde{c}(e)$ ist Restkapazität.

Am Ende verbleiben die Knoten und Kanten, die zum kürzesten s-t-Weg gehören. Gibt es mehrere s-t-Wege gleicher kürzester Länge, so verbleiben sie alle im geschichteten Netzwerk.

→ $(\tilde{V}, \tilde{E})$ ist ein DAG.
→ f ist maximaler Fluss, genau dann wenn $\tilde{V} = \emptyset$.
⇒ $\tilde{\delta}$ und $\tilde{N}$(f) können mittels Breitensuche in $\mathcal{O}(|E|)$ berechnet werden.

Lemma (Berechnung f')**.**
Sei $\tilde{N}(f)$ das zu N,f gehörige geschichtete Netzwerk, und sei $\tilde{f}$ ein Sperrfluss auf $\tilde{N}(f)$. Dann ist

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \tilde{f}(e) & \text{für } e \in E \\ f(e) - \tilde{f}(e) & \text{für } e \in \overleftarrow{E} \\ f(e) & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Fluss auf N mit $|f'| = |f| + |\tilde{f}|$

→ Gilt wegen Erfülltheit des Konservierungsgesetzes.

Algorithmisches Schema zur Berechnung eines max. Flusses

Algorithmus 6 Dinic - Algorithmisches Schema

Input: Netzwerk N = (G,s,t,c)
Output: Maximaler Fluss f auf N

```
Setze Startfluss f(e) = 0  ∀e ∈ E.
while Ṽ ≠ ∅ do
    Berechne geschichtetes Netzwerk Ñ(f).
    if Ṽ ≠ ∅ then
        Berechne Sperrfluss f̃ auf Ñ(f).
        Berechne aus f und f̃ verbesserten Fluss f auf N.
return f
```

Satz (Laufzeit)**.**
Die while-Schleife wird höchstens $|V| - 1$ mal durchlaufen.

Beweis:
Zu zeigen: Die Abstandsfunktion für die Senke $\tilde{\delta}(t)$ ist streng monoton steigend in $\tilde{N}(f)$.
→ Sei f das aktuelle und f' die nächste Iteration.
→ Sei $p = (s \to u_1 \to \cdots \to u_k = t)$ Weg mit $\delta'(u_i) = i$ in $\tilde{N}(f')$

Zeige mit Induktion: $\delta'(u_i) \geq \tilde{\delta}(u_i)$ ▷*Monotones Wachstum*
→ IA: $i = 0 : \tilde{\delta}(s) = 0 = \tilde{\delta}'(u_i)$
→ IS: $u_i \to u_{i+1}$ ⇒ Annahme: $\tilde{\delta}'(u_{i+1}) < \tilde{\delta}(u_{i+1})$
⇒ ∃ nützliche Kante bezüglich dem leeren Fluss.
Fall 1: $u_i \to u_{i+1}$ **ist nützliche Kante in** $\tilde{N}(f)$
⇒ $\delta'(u_{i+1}) = 1 + \delta'(u_i) \geq 1 + \tilde{\delta}(u_i) \geq \tilde{\delta}(u_{i+1})$ ↯
Fall 2: $u_i \to u_{i+1}$ **ist keine nützliche Kante in** $\tilde{N}(f)$
→ Kante $u_{i+1} \to u_i$ muss im vorherigen Schritt aktualisiert worden sein.
→ Kante $u_{i+1} \to u_i$ lag in $\tilde{N}(f)$ auf kürzestem Weg von s zu t
⇒ $\tilde{\delta}(u_{i+1}) + 1 = \tilde{\delta}(u_i)$
⇒ $\delta'(u_{i+1}) = 1 + \delta'(u_i) \geq 1 + \tilde{\delta}(u_i) \geq 2 + \tilde{\delta}(u_{i+1}) > \tilde{\delta}(u_{i+1})$ ↯

Noch zu zeigen: $\delta'(t) > \tilde{\delta}(t)$ ▷*Streng monotones Wachstum*
→ Unter Annahme von Gleichheit wären alle Knoten in der nächsten Iteration gleich ⇒ f wäre kein Sperrfluss gewesen!↯

□

Algorithmus 7 Sperrfluss

```
1: In: Ñ(f) mit Graph mit Durchmesser k
2: Setze Fluss f̃ von Ñ(f) auf 0          ▷Starte mit leerem Fluss
3: while t ∉ V_k do                       ▷Solange Ziel noch nicht in Graph
4:     v = t, a = ∞
5:     for i = k, ..., 1 do               ▷Berechne erweiternden Weg
6:         Wähle Kante e_i = (u, v) in G
7:         a = min{a, c̃(e)},  v = u       ▷a speichert Bottleneck
8:     Aktualisiere in Ñ(f) den Fluss mit konstruierten Weg
       um a und reduziere Kapazitäten um a (a wird entfernt)
9:     Entferne unnütze Knoten und Kanten.
10: return f
```

→ **Laufzeit**: $\mathcal{O}(|V||E|)$
→ Zuerst wird Weg von s nach t berechnet. Dann wird $\tilde{f}$ auf $\tilde{N}(f)$ aktualisiert und min. eine Kante (mit a) wird 0 und entfernt ⇒ Rest wird gelöscht: Repeat Schleife wird mit gleichen Ausgangsbedingungen neu gestartet
⇒ Jede Iteration wird mindestens eine Kante entfernt und höchstens $|V|$ Knoten betrachtet.

Parametrisierte Komplexität und VC

Definition (Vertex Cover)**.**
Sei G ein ungerichteter Graph. Ein Knotenüberdeckung ist eine Knotenmenge $C \subseteq V$, sodass jede Kante „überdeckt“ wird.
Entscheidungsproblem:

$$VC_{ent} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ hat VC } C \text{ mit } |C| = k\}$$

Das Optimierungsproblem VC_{opt} bestimmt ein minimales VC.
→ VC_{ent} ist NP-vollständig
→ VC_{opt} in Polyzeit lösbar ⇔ VC_{ent} in Polyzeit entscheidbar
→ $\mathcal{O}^*$-Notation: Nur exponentieller Anteil bleibt erhalten!

→ **Relevante Abschätzung** mit $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{1}{n+1}\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\delta}\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{1-\delta}\right)^{n} \leq \sum_{i=0}^{\delta n}\binom{n}{i} \leq \left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\delta}\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{1-\delta}\right)^{n}$$

⇒ Prof. Wanka findet den Beweis cool, weil dieser darauf beruht die 1 komplex umzuschreiben (Rest wsl. unwichtig):

$$1 = (\delta + (1-\delta))^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} \cdot \delta^i \cdot (1-\delta)^{n-i} = \ldots$$

Ein exakter Algorithmus für VC

Algorithmus 8 Minimum Vertex Cover **MVC**

In: $G = (V, E)$ **Out**: minimales VC_{opt}
procedure MVC(VC,G) ▷*Setze vorher $VC_{opt} = VC$*
  if $|E(G)| = 0$ **then** ▷*Es gibt keine Kanten mehr*
    if $|VC| < |VC_{opt}|$ **then** $VC_{opt} = VC$
    return VC_{opt}
  while $\exists (u - v) \in E(G) : deg_G(u) = 1$ **do**
  ▷*Nachbarn von Knoten mit Grad 1 sind immer in VC_{opt}*
    $VC = VC \cup \{v\}$, $G = G \backslash \{v\}$
  if $\forall v \in V(G) : deg_G(v) \in \{0, 2\}$ **then**
      ▷*Nur noch Knoten mit Grad 0 / 2*
    ▷*∃ nur noch Kreise: VC_{opt} effizient berechenbar*
    Bestimmte optimales Cover und füge es VC hinzu
    $E(G) = \emptyset$, MVC(VC,G)
  else ▷*Es gibt noch Knoten mit Grad ≥ 3*
    Wähle $v \in V(G)$ mit $deg_G(v) = k \geq 3$
    Bestimme Nachbarn von $u_1, ..., u_k$ von v
    MVC($VC \cup \{v\}, G \backslash \{v\}$)
    MVC($VC \cup \{u_1, ..., u_k\}, G \backslash \{u_1, ..., u_k\}$)

Laufzeit: VC_{opt} wird in Zeit $\mathcal{O}^*(1.38^n)$ berechnet
Beweis:
→ Für jeden Knoten v gilt: v ist im VC oder alle seine Nachbarn!
⇒ Algorithmus ist „Correct by construction “.
→ Laufzeit sei $t(n)$ bei n Knoten.
⇒ $t(n) \leq t(n-1) + t(n-4) + poly(n)$.
→ Löse zugehörige lineare Rekurrenz (Differenzengleichung)
⇒ $\lambda^4 = \lambda^3 + 1$ mit NS $\lambda \approx 1.3803$ ⇒ Laufzeit $\mathcal{O}^*(1.3803^n)$ □

Parametrisierte Komplexität

→ Bislang: Worst-Case Laufzeit in der Eingabelänge
→ Jetzt: Extrahieren von Parametern aus der Eingabe, die nicht von der Eingabelänge abhängen. Laufzeit in Abhängigkeit von Parametern und Eingabelänge angeben!

Definition (Par-parametrisierter Polynomzeit-Algo)**.**
Sei L ein Entscheidungsproblem. Eine beliebige in Polyzeit berechenbare Funktion $Par : L \rightarrowtail \mathbb{N}$ nennt man **Parametrisierung** von L. Ein Algorithmus A ist ein **Par-parametrisierter Polynomzeit-Algorithmus** für L, falls gilt:
- A löst das Entscheidungsproblem L.
- Es gibt Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und Polynom $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass Laufzeit von A für jede Eingabe I in $\mathcal{O}(g(Par(I)) \cdot p(|I|))$ ist

Existiert dieser, so nennt man L **fixed-parameter tracable in Bezug auf Par**. (für VC: $Par(I) = |I|,\ g(n) = 2^n$)

Problemkern-Methode:
- Reduziere Eingabe I auf gleichwertige Instanz I' (Problemkern), wobei die Größen von I' nur von Parameter k abhängen (Kernelization)
- Löse I' und übertrage Antwort auf I.

Algorithmus 9 DivideAndConquerVC(G,k) **DAC**

In: $G = (V, E), k$ **Out:** Antwort: $|VC_{opt}| \leq k$?
if $E = \emptyset$ **then return** True
else if k = 0 **then return** False
Wähle Kante $\{u, v\} \in E$.
$G_1 = G|_{V \backslash \{u\}},\ G_2 = G|_{V \backslash \{v\}}$
return $DAC(G_1, k-1)$ or $DAC(G_2, k-1)$

→ **Laufzeit**: $\mathcal{O}(2^k \cdot (|V| \cdot |E|))$

Problemkerngrundlagen für Buss & Goldsmith:
- Hat G ein VC der Größe k ⇒ alle Knoten mit Grad größer k müssen in VC ▷*Sonst müssten mehr als k Nachbarn ins VC*
- Für einen Graphen ohne isolierte Knoten gilt: Wenn alle Knoten Grad ≤ k haben und G ein VC der Größe m besitzt, so hat G höchstens $m \cdot k$ Kanten

Algorithmus 10 Buss & Goldsmith

In: $G = (V, E), k$ **Out:** Antwort: $|VC_{opt}| \leq k$?
$H = \{v \mid deg_G(v) > k\}$ ▷*Kernelization*
if $|H| > k$ **then return** False ▷*Kein VC möglich*
$G' = G \setminus H$
Entferne alle isolierten Knoten aus G'.
$m = k - |H|$
if G' mehr als $m \cdot k$ Kanten enthält **then** ▷*Kernelization*
  return False ▷*Kein VC möglich*
/* *Löse Problem nun auf vielen kleineren Graphen G'* */
Löse VC_{ent} mit Holzhammer DAC oder MVC
return Ergebnis

→ **Laufzeit** mit Holzhammer: $\mathcal{O}(kn + 2^k k^{2k+2})$
→ **Laufzeit** mit DAC: $\mathcal{O}(kn + 2^k k^4)$, mit MVC: $\mathcal{O}(kn + 1.38^{2k^2})$
⇒ Kernelization benötigt $\mathcal{O}(kn)$
⇒ Eigenschaften G': $|E(G')| \leq km \leq k^2, |V(G')| \leq 2km \leq 2k^2$
⇒ Der Additiven Zusammenhang ist stärker als benötigt, ein rein Multiplikativer Zusammenhang wäre per Definition auch erlaubt

Umwandlung parametrisierter Algorithmen in exakte Algorithmen

→ Sei Π Minimierungsproblem und A k-parametrisierter Algorithmus, der in Zeit $\mathcal{O}(c^k)$ die Entscheidungsfrage löst.
→ Sei zu Eingabe I die Menge U eine Obermenge, aus der alle zulässigen Lösungen stammen.
→ Mit $|U| = n$ gibt es 2^n Teilmengen.
⇒ Holzhammer hat Laufzeit $\mathcal{O}^*(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}) = \mathcal{O}^*(2^n)$.

Algorithmus 11 Exakt

In: Π, Algo. A, Eingabe I und Domain U **Out**: $\Pi_{opt}(I)$
▷***Zuerst**: Berechne maximalen Schnittpunkt der Laufzeiten*
Berechne größtes λ mit $c^{\lfloor \lambda n \rfloor} \leq \sum_{i=\lfloor \lambda n \rfloor + 1}^{n} \binom{n}{i}$
for $k = 1, \ldots, \lfloor \lambda n \rfloor$ **do** ▷*Algo A*
  if $A(I, k) = True$ **then return** k
for $\lfloor \lambda n \rfloor + 1, \ldots, n$ **do** ▷*Holzhammer*
  if Holzhammer(Π,I,U,k) = True **then return** k

→ **Laufzeit**: $\mathcal{O}^*(\sum_{i=1}^{\lfloor \lambda n \rfloor} c^i + \sum_{i=\lfloor \lambda n \rfloor + 1}^{n} \binom{n}{i}) \overset{\lambda > 1/2}{\equiv} \mathcal{O}^*(c^{\lambda n})$
→ Falls $c < 4$ kann für große n ein $\lambda > 1/2$ gewählt werden, so dass der Algo. asymptotisch schneller ist als Brute-Force.
→ **Exakt** mit **DAC** (für A) hat Laufzeit $\mathcal{O}^*(1.70872^n)$
→ **Exact** ist Correct by Construction
→ **Idee**: Kombination zweier Algos ⇒ Gemeinsamer Worst Case ist kleiner als Worst Case beider zugrundeliegenden Algos

Das Erfüllbarkeitsproblem - SAT

Definition (SAT)**.**
Gegeben ist eine boolsche Formel mit Klauseln in konjunktiver Normalform (CNF, verundet). Die Klauseln bestehen aus veroderten Literalen (boolsche Variable oder Negation). In SAT wird eine gültige Belegung gesucht. k-SAT beschränkt die Anzahl der Literale in den Klauseln der KNF durch k.

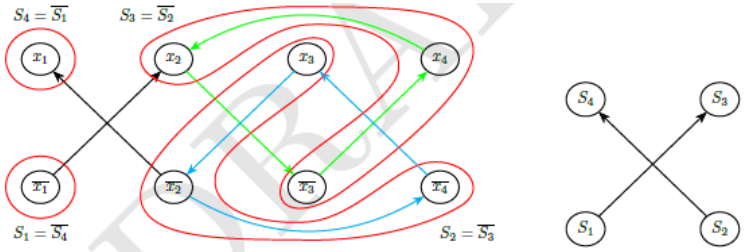
Beispiel: $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \Rightarrow (x_1 \vee \bar{x}_2)$ ist Klausel, $x_2, \bar{x}_2$ ein Literal, $x_1 = \top \wedge x_3 = \top$ eine erfüllende Variablenbelegung

Polynomieller Algorithmus für 2-SAT

Algorithmus 12 Solve2SAT

1: n = Anzahl der Variablen in Φ
2: $V = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$, E = $\emptyset$
3: Füge zu E zu allen Klauseln die möglichen Kanten hinzu.
4: Berechne mit DFS_SZK die starken ZK in G_Φ
5: Sind x und $\bar{x}$ in einer ZK, **return** Null
6: **while** $\exists$ S_i im Superstrukturgraph mit Eingangsgrad 0 **do**
7: Setze Variablen aus S_i so, dass Literale in S_i False sind.
8: /* Keine Kante hier könnte auf True gesetzt werden */
9: Entferne S_i und ausg. Kanten aus Superstrukturgraph
10: Entferne $\bar{S}_i$ und ausg. Kanten aus Superstrukturgraph
11: **return** Berechnete Belegung der Variablen

Beispiel. $(\Phi = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_3 \vee x_4))$
→ Kantenerstellung: $x_i \vee x_j \Rightarrow (\bar{x}_i \Rightarrow x_j, \bar{x}_j \Rightarrow x_i)$
→ Idee des Setzens von $S_i = \perp$: Aus $\perp$ kann man alles folgern!



Beginnt man mit S_1, so setzt man erst alle Literale aus S_1 auf False und entfernt ZK S_1 und $\bar{S}_1 = S_4$ aus G_Φ. Anschließend kann S_3 gewählt werden ....
⇒ Erhalte Belegung: $x_1 = x_3 = True,\ x_2 = x_4 = False$

Laufzeit: $\mathcal{O}(\#\text{Variablen}(= \text{Knoten}) + \#\text{Klauseln}(= \text{Kanten}))$
⇒ 1x Superstrukturgraph und 1x topologisch Durchlaufen
⇒ $\mathcal{O}(n+m) + \mathcal{O}(n+m) = \mathcal{O}(n+m)$

Algorithmen für k-SAT

Algorithmus 13 MonienSpeckenmeyer **MS**

1: **if** $\Phi = False$ **then return** False
2: **if** $\Phi = True$ **then return** True
3:
4: Wähle Klausel $C = l_1 \vee \cdots \vee l_k$.
5: **if** $C = l_1$ **then return** $\text{MS}(\Phi_{[l_1=True]})$
6: **else if** $C = l_1 \vee l_2$ **then**
7: **return** $\text{MS}(\Phi_{[l_1=True]}) \vee \text{MS}(\Phi_{[l_1=False,\ l_2=True]})$
8: **else if** $C = l_1 \vee l_2 \vee l_3$ **then**
9: **return** $\text{MS}(\Phi_{[l_1=True]}) \vee \text{MS}(\Phi_{[l_1=False,\ l_2=True]}) \vee \text{MS}(\Phi_{[l_1=False,\ l_2=False,\ l_3=True]})$
10:
11: **else if** $C = l_1 \vee \cdots \vee l_k$ **then**
12: **for** $i = 1, \ldots, k$ **do**
13: **if** $\text{MS}(\Phi_{[l_i=True, \forall j<i: l_j=False]})$ **then return** True
14: **return** False

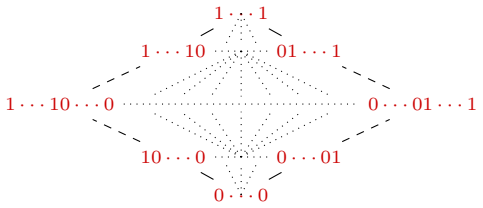
Laufzeit:
→ Sei t(n) Laufzeit mit beliebiger 3-KNF über n Variablen
⇒ $t(n) = const$ für $n \leq 3 \Rightarrow poly(n)$
⇒ $t(n) \leq t(n-1) + t(n-2) + t(n-3) + poly(n)$
⇒ Laufzeit entspricht größte Nullstelle von $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$
⇒ Laufzeit in $\mathcal{O}^*(1.84^n)$
→ Verallgemeinert auf k-SAT:
⇒ $t(n) \leq t(n-1) + \cdots + t(n-k) + poly(n)$
⇒ $\lambda^k = \lambda^{k-1} + \cdots + \lambda + 1 = \frac{1-\lambda^k}{1-\lambda} \Leftrightarrow \lambda^{k+1} + 1 = 2\lambda^k$

k	2	3	4	5	$\to \infty$
größte Nullstelle	1.62	1.84	1.93	1.97	$\to 2$

Algorithmen für SAT mit Hamming-Kugeln

Definition (Hamming-Abstand und Hamming-Kugel).
Der Hamming-Abstand $h(a,b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$ zweier 0-1-Folgen a, b gibt an, um wie vielen Stellen sich die Folgen unterscheiden. Die Hamming-Kugel $\mathcal{H}(a,d) = \{b \mid h(a,b) \leq d\}$ mit einem Radius d um a enthält alle Folgen b, welche sich an höchstens d Stellen von a unterscheiden.

Hamming Kugel ist ein Hypercube mit Dimensionen der Länge der Binärzahlen. Schaubild rechts:



Algorithmus 14 LocalSearch(Φ, a, d)

1: **Input**: Instanz Φ, Belegung $a = (a_1, ..., a_n)$ für Φ, Distanz d
2: **if** a erfüllt Φ **then return** True
3: **if** $d = 0$ **then return** False
4: Finde Klausel $C = l_1 \vee \cdots \vee l_k$, die von a nicht erfüllt wird
5: Für $i \in \{1, \ldots, k\}$ sei $\bar{a}_i$ Belegung, wo in a nur Variable l_i invertiert ist
6: **return** LocalSearch$(\bar{a}_1, d-1) \vee \ldots \vee$ LocalSearch$(\bar{a}_k, d-1)$

→ Laufzeit: $\mathcal{O}^*(k^d)$ (falls Φ eine k-KNF ist)

Lemma (LocalSearch durchmustert Hamming-Ball).
Für jede beliebige Belegung a durchmustert LocalSearch(a,d) den Hamming-Ball $\mathcal{H}(a,d)$ und gibt genau dann True aus, falls es eine gültige Belegung im Hamming-Ball gibt.

Beweis:
→ Falls erfüllende Belegung b in $\mathcal{H}(a,d)$ existiert, gilt $h(a,b) \leq d$.
→ Wenn mindestens eine Klausel nicht erfüllt ist, so muss eines der Literale geflipt werden, um diese zu erfüllen.
→ Flipt man „richtiges“ Literal, so ist man bzgl. des Hamming-Abstandes um 1 näher an b.
⇒ LocalSearch probiert alle möglichen Flips und schaut, wo es auf eine Lösung kommt. □

Algorithmus 15 Hablierender deterministischer Ansatz

1: **return** LocalSearch(Φ,0...0, $\frac{n}{2}$) ∨ LocalSearch(Φ,1...1, $\frac{n}{2}$)

⇒ Laufzeit hier: $\mathcal{O}^*(k^{n/2})$ ⇒ 3-SAT: $\mathcal{O}^*(1.73^n)$ ⇒ 4-SAT: $\mathcal{O}^*(2^n)$

Algorithmus 16 RandomLocalSearch **RLS**

1: **Input**: Instanz Φ, Rekursionsverhältnis $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$
2: ▷ *Wahl von a ist preprocessing/kann beliebig intelligent sein*
3: Wähle zufällige Belegung $a \in \{0,1\}^n$ für Φ
4: **return** LocalSearch$(\Phi, a, \delta \cdot n)$

Lemma (Erfolgswahrscheinlichkeit von RLS mit $\delta \in \{0, \frac{1}{2}\}$).

$$Pr_{succ} \geq \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{\delta n} \binom{n}{i} \geq \ldots \geq \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\delta} \cdot \left(\frac{1}{1-\delta} \right)^{1-\delta} \right)^n$$

Beweis:
→ Falls es erf. Bel. b gibt, ist der Hamming Abstand einer zufälligen Belegung a zu b binomial verteilt: $|\mathcal{H}(a, \delta n)| = \sum_{i=0}^{\delta n} \binom{n}{i}$
→ Gesamtanzahl Belegungen ist 2^n ⇒ Erste Abschätzung
→ ≥, weil es mehr als eine erf. Bel. geben könnte, sonst =
⇒ Rest des Beweises basiert auf Ausrechnen durch Anwendung der Abschätzung aus der parametrisierten Komplexität □
→ Erwartete Wiederholungen von RLS: $E[\#RLS] = 1/Pr_{succ}$
→ Erwartete Laufzeit: $E[\#RLS] \cdot$ Laufzeit(LocalSearch)

k	2	3	4	5	$\to \infty$
bestes (min) δ	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\to 0$
Laufzeit $\mathcal{O}^*$	$(4/3)^n$	$(3/2)^n$	$(8/5)^n$	$(5/3)^n$	$\to 2^n$

Dynamische Programmierung

Das TSP

Gegeben: Vollständiger Graph auf n Knoten, Abstandskosten c
Gesucht: Hamilton-Kreis K^* mit möglichst niedrigen Kosten.
Holzhammer: Probiere $(n-1)!$ viele Permutationen.
→ Laufzeit: $\mathcal{O}^*((n-1)!) = \mathcal{O}^*((\frac{n}{e})^n)$
Besser: Nutze dynamische Programmierung:
$c(S,k)$ = Minimale Kosten eines Hamilton-Pfads von Knoten 1 zu Knoten k auf dem durch die Knoten $\{1\} \cup S$ induzierten Teilgraph, $S \subseteq \{2,\dots,n\}, k \in S$
Berechne dies mittels folgender rekursiver Beziehung:

$$c(s,k) = \begin{cases} c(1,k) & \text{für } S = \{k\} \\ \underbrace{\min\{c(S \setminus \{k\}, m) + c(m,k) \mid m \in S \setminus \{k\}\}}_{\text{Bellmansche Optimalitätsbeziehung}} & \text{für } |S| > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow c(K^*) = \min\{c(\{2,\dots,n\}, m) + c(k,1) \mid k \in \{2,\dots,n\}\}$
→ Berechnung von $c(S,k)$ ist, wenn alle $C(S \setminus \{k\}, m)$ bekannt sind, mit $|S|-1$ Additionen und $|S|-2$ Vergleichen möglich.
⇒ Insgesamt: $2|S|-3$ Schritte.
→ Zudem gibt es $\binom{n-1}{l}$ l-elementige Mengen S mit jeweils l Möglichkeiten für k.
→ Dazu $2n-3$ Schritte zur Berechnung von $c(K^*)$.
⇒ Laufzeit:

$$\sum_{l=2}^{n-1}[(2l-3) \cdot l \cdot \binom{n-1}{l}] + 2n - 3 \leq 2n^2 2^n + 2n - 3 = \mathcal{O}^*(2^n)$$

→ **Bellmansche Optimalitätsbeziehung:** Optimale Lösung lässt sich aus optimalen Teillösungen zusammensetzen.
→ Beim TSP lassen sich optimale Hamiltonpfade durch Teillösungen ohne den aktuellen Endknoten und den Knoten des verbliebenen direkten Weges berechnen.
→ Rekonstruktion: Optimale Reihenfolge kann dadurch bestimmt werden, dass man sich bei jedem $c(S,k)$ merkt, durch welche Sublösung der minimale Wert erreicht wurde.

Zeitplanung

Gegeben: n Jobs J_i, Zeiten $a_1,\dots,a_n$, Kosten $c_1(t),\dots,c_n(t)$
Gesucht: Fahrplan π mit minimalen Kosten
→ Maschine muss J_i vollständig erledigen (steht nie still)
→ Reihenfolge kann durch Permutation π beschrieben werden
→ Abschlusszeit $t_{\pi(i)}$ von $J_{\pi(i)}$: $t_{\pi(i)} = \sum_{j=1}^{i} a_{\pi(j)}$
→ Kosten: $\sum_{i=1}^{n} c_{\pi(i)}(t_{\pi(i)})$
→ Für Teilmenge $S \subseteq \{J_1,\dots,J_n\}$ sei $t_S = \sum_{J_i \in S} a_i$.
→ opt(S) bezeichne Kosten eines minimalen Fahrplans in $[0, t_S]$.

Berechnung von opt(S) mittels rekursiver Beziehung:

$$opt(S) = \begin{cases} c_i(a_i) & \text{für } S = \{J_i\} \\ \underbrace{\min\{opt(S \setminus \{J_i\}) + c_i(t_S) \mid J_i \in S\}}_{\text{Bellmansche Optimalitätsbeziehung}} & \text{für } |S| > 1 \end{cases}$$

→ Laufzeit von $opt(\{J_1,\dots,J_n\})$: $\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot \binom{n}{i} = \mathcal{O}^*(2^n)$
→ Auch hier kann die Bellmansche Optimalitätsbeziehung angewandt werden
→ Optimale Lösung lässt sich aus einzelnen Jobs bilden.
→ Rekonstruktion: Optimale Reihenfolge kann dadurch bestimmt werden, dass man sich bei jedem opt(S) merkt, durch welche Sublösung der optimale Wert erreicht wurde.

Matrixmultiplikation

Gegeben: n Matrizen M_i mit r_{i-1} Zeilen und r_i Spalten.
Gesucht: Klammerung, sodass Zahlenmultiplikation minimiert werden.
Berechnen der $r_{i-1} \times r_{i+1}$-Matrix $M_i \cdot M_{i+1}$ benötigt mit der Schulmethode $r_{i-1} \cdot r_i \cdot r_{i+1}$ Zahlenmultiplikationen.

Für eine Teilfolge $M_i,\dots,M_j$ sei $m_{i,j}$ die minimale Anzahl an Zahlenmultiplikationen.
Berechnung von $m_{i,j}$ mittels folgender rekursiver Beziehung:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & ,i = j \\ \underbrace{\min\{m_{i,k} + m_{k+1,j} + r_{i-1} \cdot r_k \cdot r_j \mid i \leq k < j\}}_{\text{Bellmansche Optimalitätsbeziehung}} & ,i < j \end{cases}$$

→ Laufzeit zur Berechnung von $m_{1,n}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j-i+1) = \mathcal{O}(n^3)$$

→ Rekonstruktion: Optimale Reihenfolge kann dadurch bestimmt werden, dass man sich bei jedem $m_{i,j}$ merkt, durch welche Sublösung der minimale Wert erreicht wurde.

Subsetsum in der dynamischen Programmierung:
Problem: Finde Summe der $a_1,\dots,a_n$, welche S ergeben.
Basisfall: $f(1,S) = \begin{cases} 1 & ,S = a_1 \textit{ oder } S = 0 \\ 0 & ,\textit{sonst} \end{cases}$
Rekursiver Aufruf: $f(i,S) = \max\{f(i-1,S), f(i-1,S-a_i)\}$

Klausurfragen:

Kapitel 1: Tiefensuche

1. Erklären Sie DFS für ungerichtete Graphen. Warum funktioniert dies?
2. Tiefensuche erzeugt Wald mit welchen Eigenschaften? Was kann mit tiefen Suche berechnet werden? Was ist eine nicht triviale Eigenschaft, die auf gerichteten Graphen mit DFS berechnet wird? (Maximale Zusammenhangskomponenten)
3. Wann ist ein Graph (Teilgraph) maximal zusammenhängend? Was ist max ZHK?
4. Definieren Sie Artikulationspunkt und erklären Sie, wie man einen solchen erkennt.
5. Definieren Sie zweifache Zusammenhangskomponente und erläutern Sie einen Ansatz zum Erkennen.
6. Erklären Sie die tief-Funktion und ihre Zusammenhänge zur dfnr.
7. Was ist ein Superstrukturtgraph? Wieso ist dieser wichtig?
8. Wie findet man über Tiefensuche 2fache ZHK? Wo kann ein AP im Keller liegen?
9. Warum funktioniert DFS-2ZHK?
10. Was kann man bei gerichtetem Graphen berechnen? (starke ZHK)
11. Welche Kantentypen gibt es im Tiefensuchwald für Digraphen?
12. Welche Eigenschaften haben Rückkanten im Tiefensuchbaum?
13. Definieren Sie starke Zusammenhangskomponente und stellen Sie eine Verbindung zum Superstrukturgraphen her.
14. Beschreiben Sie die Tiefensuche zum finden starker ZHK. Warum funktioniert dies?
15. Wieso ist die Laufzeit linear in der Eingabelänge?
16. Algorithmen DFS-2ZHK und DFS-SZHK an Beispiel durchführen.

Kapitel 2: Flüsse in Netzwerken

1. Definieren Sie ein kombinatorisches Optimierungsproblem.
2. Definiere Wert eines Flusses über Senke / Kante
3. Was ist Kapazität eines Schnittes?(Nur das was man rüberbringt)
4. Definieren Sie maximalen Fluss.
5. Erklären Sie das Konzept der erweiternden Wege und des Residualgraphen. Wieso kann es zu einer exponentiellen Laufzeit kommen?
6. Wieso ist das Ausnutzen von Vor- und Rückkanten im Residualgraphen wichtig?
7. Beweisen Sie den Satz über erweiternde Wege.
8. Was besagt das Integrality-Theorem?
9. Erklären Sie den Algorithmus von Dinic. Erläutern Sie die Laufzeit.
10. Erklären Sie den Zusammenhang von geschichtetem Netzwerk und Sperrfluss.

Kapitel 3: Parametrisierte Komplexität

1. Definieren Sie VC und geben Sie einen exakten Algorithmus an.
2. Definieren Sie parametrisierte Komplexität.
3. Erklären Sie den Algorithmus von Buss & Goldsmith. Welche Laufzeit hat dieser? Wäre statt dem Additiven Zusammenhang auch ein multiplikativer möglich? (Ja)
4. Wann kann es kein VC der Größe k geben?
5. Wie kann ein parametrisierter Algorithmus in einen exakten Algorithmus umwandeln?
6. Mit welchem Ansatz kann man Laufzeiten in $\mathcal{O}^*$ bestimmen?
7. Wie kann Kombination von Algos besser sein, als die einzelnen? (Gemeinsamer Worst Case ist kleiner)

Kapitel 4: Das Erfüllbarkeitsproblem

1. Definieren Sie SAT.
2. Erklären Sie den polynomiellen Algorithmus für 2SAT.
3. Erklären Sei den Algorithmus von Monien-Speckenmayer. Analysieren Sie die Laufzeit.
4. Wie funktioniert SAT über einen Berechnungsbaum?
5. Erklären Sie den Zusammenhang von LocalSearch und Hamming-Ball.
6. Wie kann man LocalSearch randomisieren.

Kapitel 5: Dynamische Programmierung

1. Erklären Sie das TSP-Problem und den Nutzen der dynamischen Programmierung.
2. Erklären Sie das Scheduling-Problem und den Nutzen der dynamischen Programmierung.
3. Erklären Sie Matrixmultiplikation und den Nutzen der dynamischen Programmierung.
4. Erklären Sie ein dynamisches Verfahren für Subsetsum.
5. Was besagt die Bellmannsche Optimalitätsbedingung?