# Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundlagen

## 1.1 Grundlagen der Grundlagen

### 1.1.1 Grundlegende Rechenoperationen

**Definition 1.1 (Division mit Rest)**

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Teilt man diese erhält man einen **Quotienten** $q \in \mathbb{N}$ und einen **Rest** $r \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a}{b} = q \text{ Rest } r$$

- Mit dem modulo-Operator kann dies umgeschrieben werden zu: $a \equiv r \; mod \; b$
- Dadurch entsteht eine **Kongruenzgleichung**

**Definition 1.2 (Abrundungs- und Aufrundungsfunktionen)**

- Abrundungsfunktion $\lfloor \; \rfloor : x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor = max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$
- D.h. Division mit abgerundetem / verworfenem Rest
- Aufrundungsfunktion $\lceil \; \rceil : x \in \mathbb{R} : \lceil x \rceil = max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$
- D.h. Division mit aufgerundetem Rest

**Definition 1.3 (Teilbarkeit)**

- Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $a \mid b \Leftrightarrow \exists c : b = a \cdot c$
- D.h. a teilt also b, wenn b ein Vielfaches von a ist
- Insbesonders gilt: $1 \mid a \;\; -1 \mid a \;\; a \mid a \;\; a \mid 0$
- D.h. Teilbarkeit hängt nicht vom Vorzeichen ab

**Definition 1.4 (ggT und kgV)**

- ggT(a,b) ist der größte gemeinsame Teiler aus den Teilermengen von a und b
- kgV(a,b) ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen

**Definition 1.5 (Kongruenzgleichungen und Teilbarkeit)**

- Seien $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Damit kann die Kongruenzgleichung $a \equiv b \; mod \; m$ gebildet werden
- Im Bezug auf die Teilbarkeit gilt: $a \equiv b \; mod \; m \Leftrightarrow m \mid a - b$
- Die **Kongruenzklasse** a mod m wird als $\overline{a}^{mod \;\; m}$ geschrieben
- Es gilt $\overline{a}^{mod \;\; m} = \overline{a}^{mod \;\; m} \Leftrightarrow a \equiv b \quad \text{mod } m \Leftrightarrow m \mid a - b$

**Algorithmus 1.6 (Euklidischer Algorithmus).**
Mit dem euklidischen Algorithmus kann ggT(a,b) mit $a, b \in \mathbb{N}$ berechnet werden. Zur Vereinfachung sollte $a > b$ gelten:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{a} & \% & \text{b} & = & q_0 & \text{Rest} & r_0 \\
\text{b} & \% & q_0 & = & q_1 & \text{Rest} & r_1 \\
q_0 & \% & q_0 1 & = & q_2 & \text{Rest} & r_2 \\
 & & & \dots & & & \\
q_{n-2} & \% & q_{n-1} & = & q_n & \text{Rest} & r_n = 0
\end{array}$$

Abschließend gilt ggT(a,b) = $q_n$.

**Algorithmus 1.7 (Erweiterter Euklidischer Algorithmus).**
Mit dem erweiteren euklidischen Algorithmus können folgende Gleichungen gelöst werden:

$$ggT(a, b) = x \cdot a + y \cdot b$$

Dabei gilt $a, b, x, y \in \mathbb{N}$. Dieser Algorithmus ist besonders wichtig um die Inversen in Restklassenkörpern zu berechnen. Er funktioniert wie folgt:

| Zeile | Reste R | Quotienten Q | x-Spalte | y-Spalte |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $a$ | - | 1 | 0 |
| 1 | $b$ | - | 0 | 1 |
| $i$ | $R_{i-2} \; mod \; R_{i-1}$ | $\lfloor R_{i-2}/R_{i-1} \rfloor$ | $x_{i-2} - (Q_i \cdot x_{i-1})$ | $y_{i-2} - (Q_i \cdot y_{i-1})$ |
| $n$ | $ggT(a, b)$ | $\lfloor R_{n-2}/R_{n-1} \rfloor$ | $x$ | $y$ |
| $n+1$ | 0 | $\lfloor R_{n-1}/R_n \rfloor$ | - | - |

### 1.1.2 Das Landau Symbol

**Definition 1.8 (Landau Symbol)**

Eine Funktion f ist asymptotisch gegen über g vernachlässigbar, also $f \in o(g)$ falls gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Eine Funktion f hat eine asymptotisch obere Schranke g, also $f \in O(g)$, wenn gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

Zwei Funktionen f,g sind asymptotisch gleich, also $f \sim g$, wenn gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

**Beispiele:**

- Gilt für eine Funktion/Folge $f = o(1)$ so konvergiert f gegen 0
- Gilt für eine Funktion/Folge $f = O(1)$ so ist f beschränkt
- Für ein beliebiges $a > 0$ gilt: $log(x) = o(x^a)$ und $log(x) = O(x^a)$

**Bemerkungen:**

- $f = O(g)$ bzw. $f \in O(g)$ bedeutet, dass f **nicht wesentlicher** schneller als g wächst
- $f = o(g)$ bzw. $f \in o(g)$ bedeutet, dass f **langsamer** schneller als g wächst
- $f(x) = x^3 + x^2 + x + a = O(x^3)$ mit $a \in \mathbb{Z}$
- Das Landau-Symbol wird zur Approximation komplexerer Funktionen durch einfachere verwendet

### 1.1.3 Grundlegende Eigenschaften von Zahlen

**Primzahlen**

Eine natürliche Zahl ist eine Primzahl p, wenn sie nur duch 1 und sich selbst p teilbar ist.

**Beispiele:**

2 3 5 7 11 13 17 19 23

**Fundamentalsatz der Arithmetik**

Jede natürliche Zahl n ist als eindeutiges Produkt von Primzahlen darstellbar.

**Beispiele:**

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \qquad 73 = 73 \qquad 1337 = 7 \cdot 191$$

**Definition 1.9 (p-adische Bewertung einer Zahl)**

Die p-adische Bewertung $v_p(n)$ einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt an, wie oft eine Primzahl $p$ in n aufgeht.

**Beispiele:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $56 = 2^3 \cdot 7$ | $56 = 2^3 \cdot 7$ | $56 = 2^3 \cdot 7$ | $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ | $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ | $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ |
| $v_2(56) = 3$ | $v_5(56) = 0$ | $v_7(56) = 1$ | $v_2(42) = 1$ | $v_3(42) = 1$ | $v_5(42) = 0$ |

**Fundamentalsatz und ggT / kgV**

Der ggT(a,b) ist das Produkt aller Primzahlen, die sowohl in der Faktorisierung von a und b vorkommen. Kommt eine Primzahl mehrfach vor, wird die kleinere Potenz gewählt:

$$ggT(a, b) = \prod_p p^{min(a_p, b_p)}$$

Für kgV(a,b) ist die ähnlich, nur dass die größere Potenz gewählt wird:

$$kgV(a,b) = \prod_p p^{max(a_p,b_p)}$$

Daraus folgt auch: $ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = a \cdot b$

**Beispiele:**
- $ggT(2^5 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^5) = 2^3 \cdot 3^2$
- $kgV(2^5 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^5) = 2^5 \cdot 3^5$

**Satz 1.10 (nach Euklid)**

Es gibt unendlich viele Primzahlen

**Bemerkung:**
- Dieser Satz wird später bewiesen

## 1.2 Konstruktion neuer Primzahlen aus alten Primzahlen

**Satz 1.11 (Neue Primzahlen und Primfaktorzerlegungen)**

Sind $p_1, ..., p_r$ verschiedene Primzahlen und sei $r > 0$ und $e_1, ..., e_r > 0$ so kommein in der Primfaktorzerlegung von

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot ... \cdot p_r^{e_r} \pm 1$$

nur von $p_1, ..., p_r$ verschiedene Primzahlen vor.

**Beweis 1.12.**
- Zu zeigen: $p_1^{e_1} \nmid x \pm 1, ..., p_r^{e_r} \nmid x \pm 1$ mit $x = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot ... \cdot p_r^{e_r}$ und $p_i^{e_i} \in \{p_1^{e_1}, ..., p_r^{e_r}\}$
- Es gilt $p_i \mid x + m_i \cdot p_i$ für ein beliebiges ganzzahliges $m_i$
- In allen Fällen gilt $m_i \cdot p_i \neq \pm 1$ und somit auch $p_i \nmid x \pm 1 \Leftrightarrow p_i \nmid n$

□

**Bemerkung:**
- Damit kann man nun einfach zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt
- Man kann immer ein Produkt aus Primzahlen bilden, ein dazuaddieren und eine weitere Primzahl finden. Damit kann man wieder ein Produkt bilden und wieder 1 dazuaddieren und eine weitere Primzahl finden. Etc.

**Satz 1.13 (Mersennesche Zahlen)**

- Mersennesche Zahlen sind von der Form: $M_n = 2^n - 1$
- Mersennsche Primzahlen sind von der Form: $M_p = 2^p - 1$

**Beispiele:**

$$2^2 - 1 = 3 \qquad 2^3 - 1 = 7 \qquad 2^5 - 1 = 31 \qquad 2^7 - 1 = 127 \qquad 2^{13} - 1 = 8191$$

**Beweis 1.14 (Mersenne Primzahlen).**
Der Exponent muss eine Primzahl sein, da man ansonsten eine Zusammengesetzte Zahl erhält, weil $2^{ab} - 1$ von $2^a - 1$ und $2^b - 1$ geteilt wird. □

**Bemerkung:**
- Mit Mersennschen Primzahlen werden Rekordprimzahlen erzeugt

## 1.3 Abstände zwischen Primzahlen

### 1.3.1 Kleine Abstände

**Definition 1.15 (Primzahlzwillinge)**

Sind p und p+2 Primzahlen, so werden diese Primzahlzwillinge genannt

**Beispiele:**

$$(3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (59,61), (71,73)$$

**Bemerkung:**

- Es wird vermutet, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Dies ist noch nicht bewiesen
- Es wurde aber gezeigt, dass es eine Schranke n gibt, sodass es unendliche viele Primzahlen mit Abstand n gibt. Ist diese Schranke 2, so gäbe es unendlich viele Primzahlzwillinge
- Das Polymath Projekt konnte die Gültigkeit für eine Schranke von 246 beweisen

**Aufgabe 1.16. (Primzahldrillinge)**

---

Sind p und p+2 und p+4 Primzahlen, so werden diese Primzahldrillinge genannt. Beweise, dass es außer (3,5,7) keine weiteren Primzahldrillinge gibt.

---

**Beweis 1.17.**

- Eine Zahl ist immer kongruent 0 mod 3
- Somit ist immer eine der Zahlen durch 3 teilbar
- 3 ist die einzige duch 3 teilbar Primzahl, somit gibt es nur ein derartiges Tripel

□

### 1.3.2 Große Abstände

**Satz 1.18 (Intervalle ohne Primzahlen)**

Sei $m \geq 2$, so sind alle Zahlen zwischen $m! + 2$ und $m! + m$ zusammengesetzt, d.h. das Intervall$[m! + 2, m! + m]$ enthält keine Primzahl.

**Beispiele:**

$$(4, 4), (8, 9), (26, 28), (122, 125), (722, 726), (5042, 5047), (40322, 40328), (362882, 362889)$$

**Beweis 1.19.**

Für $2 \leq i \leq m$ gilt $i \mid m! + 1$ und $1 < i < m! + i$, sodass i ein nicht trivialer Teiler von $m! + i$ ist und dies somit zusammengesetzt ist. □

**Bemerkung:**

- Sei $p_1, p_2, p_3, ...$ die Primzahlfolge
- Alle Zahlen zwischen $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n - p_n - 1$ und $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n - 2$ sind zusammengesetzt
- Sei $n \geq k$ so gilt: $p_n < p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n - p_n - 1$ und $p_{n+1} > p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n - 2$
- Somit gilt auch $p_{n+1} - p_n \geq p_k + 1$

**Satz 1.20 (Unendlich große Abstände zwischen Primzahlen)**

Die Abstände zwischen benachbarten Primzahlen können beliebig groß werden.

**Bemerkungen:**

- Die Existenz beliebig großer Abstände folgt aus dem vorrangehenden Satz
- Man hat nun versucht den Abstand $d = p_{n-1} - p_n$ abhängig von $p_n$ zu ermitteln
- Man konnte dies von $d = O(p_n^{0.625})$ zu $d = O(p_n^{0.525})$ approximieren

## 1.4 Die Primzahl-k-Tupel Vermutung

**Definition 1.21 (Zulässige k-Tupel)**

Seien $a_1 < a_2 < ... < a_k$ k ganze Zahlen. Ein k-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathbb{Z}^k$ ist zulässig, wenn für jede Primzahl $p \leq k$ eine ganze Zahl $z_p$ existiert, sodass gilt:

$$a_1 \not\equiv z_p \mod p, a_2 \not\equiv z_p \mod p, ..., a_k \not\equiv z_p \mod p$$

**Beispiel:**

- $(a_1, a_2) = (0, 2)$ ist zulässig, da $a_i \not\equiv 1 \mod 2 \ \forall i \in \{1, 2\}$ gilt
- $(a_1, a_2, a_3) = (0, 2, 4)$ ist nicht zulässig, da $0 \equiv 0 \mod 3, 2 \equiv 2 \mod 3, 4 \equiv 1 \mod 3$ gilt

**Bemerkung:**

- Ist $(a_1, a_2, ..., a_k)$ ein zulässiges Tupel, so ist es $(a_1 + m, a_2 + m, ..., a_k + m)$ mit $m \in \mathbb{Z}$ auch.
- Man kann folgern, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > k - a_1$ das k-Tupel nicht nur aus Primzahlen besteht
- Daraus kann man folgern, dass es nur ein Primzahldrilling gibt und ansonsten $n > k - a_1$ gilt

**Satz 1.22 (Primzahl k-Tupel Vermutung)**

Ist $(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{Z}^k$ mit $a_1 < a_2 < ... < a_k$ ein zulässiges k-Tupel, so gibt es unendlich viele Primzahl k-Tupel der Gestalt

$$(p_1, p_2, ..., p_k) = (a_1 + n, a_2 + n, ..., a_k + n)$$

**Bemerkung:**

- die Primzahl k-Tupel Vermutung ist nicht bewiesen
- Gilt die Vermutung, so gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge, da (0,2) zulässig ist

**Satz 1.23 (Generierung von zulässigen k-Tupeln)**

Gilt für k Primzahlen $p_1 < p_2 < ... < p_k$ und $p_1 > k$ so ist $(p_1, p_2, ..., p_k)$ ein zulässiges k-Tupel.

**Beweis 1.24.**
Sei $p_i \in \{p_1, p_2, ..., p_k\}$. Es existiert eine Primzahl $p' \leq k$, sodass $p' < p_i$ und somit auch $p' \nmid p_i$ gilt. Somit gilt $p_i \neq 0 \mod p' \forall i \in \{1, ..., k\}$ und die Eigenschaften eines zulässigen k-Tupels werden erfüllt. □

### 1.5 Die Goldbach Vermutung

**Satz 1.25 (Goldbach Vermutung)**

Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, ist Summe zweier Primzahlen.

**Beispiele:**

$$4 = 2 + 2 \qquad 8 = 3 + 5 \qquad 12 = 7 + 5$$
$$6 = 3 + 3 \qquad 10 = 5 + 5 \qquad 14 = 7 + 7$$

**Bemerkung**

- Die Goldbachvermutung ist bisher unbewiesen
- Terence Tao bewiese die Variante der Goldbachvermutung für die Summe aus 5 Primzahlen

**Satz 1.26 (Ternäre Goldbach Vermutung)**

Jede ungerade Zahl größer 7 ist Summe dreier Primzahlen

**Bemerkung**

- Die Gültigkeit der ternären Goldbach-Vermutung wurde bewiesen
- Der Beweis von Helfgott bewies die Vermutung für alle Zahlen größer als $10^{30}$ und den Rest mittels computeller Verifikation

# 2 Ganzwertige Polynome

## 2.1 Polynome aus gegebenen Zahlen bestimmen*

**Definition 2.1 (Ganzwertiges Polynom)**

Ein ganzwertiges Polynom die für einen Input aus den ganzen Zahlen auch immer eine ganze Zahl liefern.

**Satz 2.2 (Polynome als Binomialkoeffizienten)**

Sei x ein rationaler Koffizient und sei $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\binom{x}{k} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} \text{ und } \binom{x}{0} = 1$$

**Beispiele:**

$$\binom{x}{1} = x, \binom{x}{2} = \frac{1}{2}x(x-1), \binom{x}{3} = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

**Satz 2.3 (Polynom anhand vorgegebener Zahlen)**

Hat man die Zahlen $a_1, ..., a_n$, so erfüllt das Polynom f von Grad $\leq n$, welches mittels dem

Schema

$$\begin{array}{cccc} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-1} & a_{0,n} \\ a_{1,0} = a_{0,0} - a_{0,1} & a_{1,1} = a_{0,1} - a_{0,2} & \cdots & a_{1,n-1} = a_{0,n-1} - a_{0,n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n-1,0} = a_{n-2,0} - a_{n-2,1} & a_{n-1,1} = a_{n-2,1} - a_{n-2,2} & & & \\ a_{n,0} = a_{n-1,0} - a_{n-1,1} & & & & \end{array}$$

die Bedingungen $f(0) = a_1, f(1) = a_2, \ldots, f(n) = a_n$ mit

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_{k,0} \binom{x}{k}$$

**Beispiel:**
Gesucht ist ein Polynom von Grad $\leq 3$ mit $f(0) = 4, f(1) = 2, f(2) = 5, f(3) = 7$. Dazu bildet man zuerst folgende Struktur:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 2 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & \\ 5 & -1 & & \\ -6 & & & \end{array}$$

Damit erhält man das gesuchte Polynom:

$$f(x) = 4 - 2\binom{x}{1} + 5\binom{x}{2} - 6\binom{x}{3} = 4 - \frac{13}{2}x + \frac{11}{2}x^2 - x^3$$

## 2.2 Primzahlen als Werte von Polynomen

**Satz 2.4 (Nichtkonstante Polynome und Primzahlen)**

Die Ergebnismenge jedes nichtkonstanten Polynoms kann nicht ausschließlich Primzahlen enthalten

**Beweis 2.5.**
- Man nimmt das Gegenteil des Satzes an
- Man erzeugt aus dem Polynom $f$ eine Primzahl $f(n) = p$
- Durch Umformung kann man erkennen, dass $p \mid f(pm + n)$ gilt
- Damit hat man einen Widerspruch

□

**Satz 2.6 (Dirichletscher Primzahlsatz)**

Ist $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(a, b) = 1$, so gibt es unendlich viele Primzahlen der Gestallt $an + b$.

**Beispiel:**
- Es gibt unendlich viele Primzahlen der Gestalt $4n - 1$

**Bemerkungen:**
- Wird später bewiesen

**Satz 2.7 (Hypothese H von Schinzel)**

Seien $f_1(x), \ldots, f_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzible, nichtkonstante Polynome mit höchstem Koeffizienten $> 0$ sodass

$$ggT(\{\forall n \in \mathbb{Z} : f_1(n) \cdot f_2(n) \cdot \ldots \cdot f_k(n)\}) = 1$$

gilt, dann gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, sodass alle Zahlen $f_1(n), \ldots, f_k(n)$ Primzahlen sind.

**Bemerkungen:**
- Möchte man die Bedingung mit dem ggT nachweisen, so reicht es ein paar $a, b$ aus der Ergebnismenge zu finden, sodass $ggT(a, b) = 1$ ist
- Möchte man die Bedingung mit dem ggT wiederlegen, so muss man zeigen, dass alle Elemente der Ergebnismenge gemeinsame Teiler haben (z.b. alle Elemte sind durch 2 teilbar)

- Hat man nur ein Polynom von Grad n, so gilt: $ggT(\{\forall k \in \mathbb{Z} : f(k)\}) = ggT(f(a), f(a+1), f(a+2), ..., f(a+n)) = ggT(f(0), f(1), f(2), ..., f(n))$ mit beliebigem $a \in \mathbb{Z}$ (Beweis und Gegenbeweis möglich)

**Beispiele:**

- Die Polynome $f_1(x) = 10x+3, f_2(x) = 10x+7, f_3(x) = 10x+9$ erfüllen die Vorraussetzungen der Hypothese: Jedes Polynom ist irreduzibel und nichtkonstant. Zudem gilt $f_1(0)\cdot f_2(0)\cdot f_3(0) = 3^2\cdot 7$ und $f_1(1)\cdot f_2(1)\cdot f_3(1) = 13\cdot 17\cdot 19$ woraus $ggT(f_1(0)\cdot f_2(0)\cdot f_3(0),\ f_1(1)\cdot f_2(1)\cdot f_3(1) = 13\cdot 17\cdot 19) = ggT(3^2\cdot 7,\ 13\cdot 17\cdot 19) = 1$. Somit gibt es unendlich viele solcher Primzahl-4-Tupel

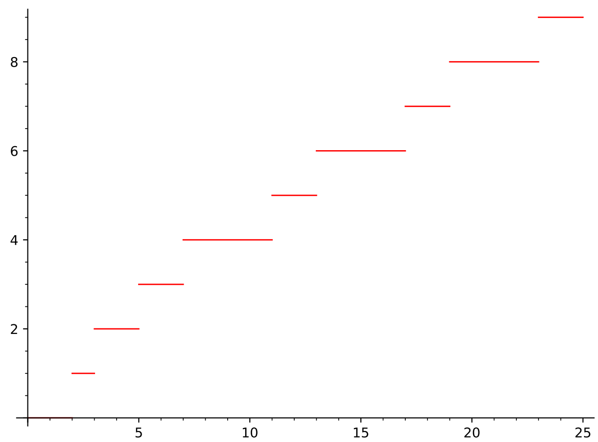
- Das Polynom $f(x) = x^3+2\cdot x^2+3\cdot x+5$ erfüllt die Vorraussetzungen. Das Polynom ist irreduzibel und nichtkonstant. Zudem gilt $f(0) = 5$ und $f(1) = 11$ und somit gilt $ggT(f(0), f(1)) = 1$ gilt

- Das Polynom $f(x) = x^3 + 2\cdot x^2 + 3\cdot x + 6$ erfüllt **nicht** die Voraussetzungen. Das Polynom ist zum einen reduzibel: $f(x) = (x+2)(x^2+3)$. Zudem gilt $ggT(f(0), f(1), f(2), f(3)) = ggT(4, 10, 26, 58) = ggT(ggT(4, 10), 26, 58) = ggT(ggT(2, 26), 58) = ggT(2, 58) = 2$

**Bemerkungen:**
- Sei $(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{Z}^k$ ein zulässiges k-Tupel, dann erfüllen die Polynome $x + a_1, ..., x + a_k$ die Voraussetzungen der Hypothese H
- Gilt die Hypothese so gilt die Primzahl-k-Tupel Vermutung
- Somit gibt es nach der Hypothese auch unendlich viele Primzahlzwillinge
- Gilt die Hypothese, so gibt es zu jeder Zahl $m \in \mathbb{N}$ zwei Primzahlen p und q, sodass $m = \frac{p+1}{q+1}$ gilt. Beweis: $f_1(x) = mx + m - 1$ und $f_2(x) = x$ erfüllen die Voraussetzungen. Daraus kann man $p + 1 = mn + m = mq + m = m(q + 1)$ folgern, was die Behauptung beweist.

# 3 Der Primzahlsatz

## 3.1 Die Primzahlzähfunktion




Die Primzahlzähfunktion bis 25
Geplottet mit dem Sage Befehl: plot(prime_pi,0,100,color="red",vertical_lines=False)

**Definition 3.1 (Primzahlzählfunktion)**

Die Funktion ist für eine reelle Eingabe folgendermaßen definiert:

$$\pi(x) = \#\{p \leq x\} = \sum_{p \leq x} 1$$

**Beispiele:**

$$\pi(10) = 4 \qquad \pi(25) = 9 \qquad \pi(50) = 15 \qquad \pi(75) = 21 \qquad \pi(100) = 25$$

**Bemerkungen:**
- $\pi(x)$ ist stückweise konstant und springt pro neuer Primzahl um 1 nach oben

## 3.2 Legendres Abschätzung der Primzahlzählfunktion

**Satz 3.2 (Abschätzung nach Legendre)**

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log(x) - B} \text{ mit } B \approx 1.08366$$

**Bemerkungen:**
- Später verbessert und bewiesen durch Tchebychev

## 3.3 Der Primzahlsatz

**Satz 3.3 (Primzahlsatz)**

Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

**Bemerkungen:**
- Grundlegender Satz der Analythischen Zahlentheorie
- Abgeleitet anhand der Abschätzung von Legendre
- Beweis ist sehr komplex

## 3.4 Wie groß ist die n-te Primzahl*

**Satz 3.4 (Abschätzung der n-ten Primzahl)**

Die Approximation der Primzahlzählfunktion kann auch umgeschrieben werden:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{log\ x} \Leftrightarrow p_n \sim n\ log\ n$$

**Bemerkung:**
- Die nte Primzahl kann also mit $n\ log\ n$ approximiert werden
- Abgeleitet vom Primzahlsatz
- Der Beweis dazu ist sehr kompliziert

## 3.5 Gaußsche Primzahldichtenfunktion

**Satz 3.5 (Primzahldichte-Vermutung)**

Gauß vermutet, dass die Primzahldichte um x ungefähr $\frac{1}{\log x}$ ist.

**Bemerkung:**
- Dieser Zusammenhang ist nocht nicht bewiesen und geht lediglich aus Gauß Experimenten hervor

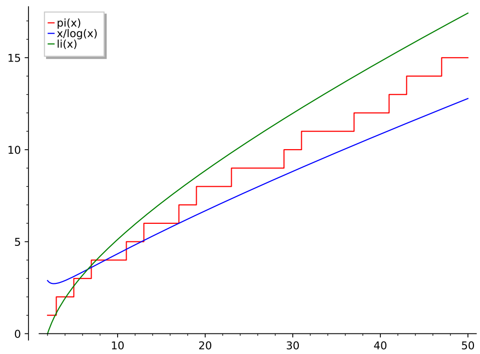
**Satz 3.6 (Gaußsche Approximation anhand der Primzahldichte)**

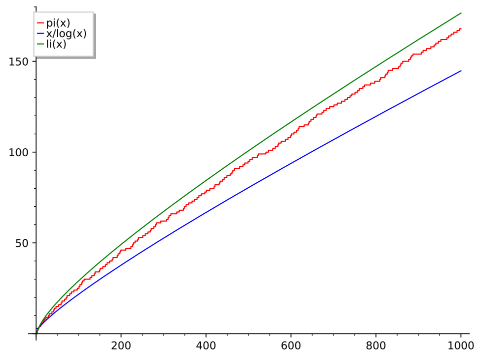
$$\pi(x) \sim li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

**Bemerkung:**
- Dieser Zusammenhang ist nocht nicht bewiesen und geht lediglich aus Gauß Experimenten hervor

## 3.6 Vergleich der bisherigen Approximationen

**Vergleich der bisherigen Approximationen:**




**Bemerkung:**

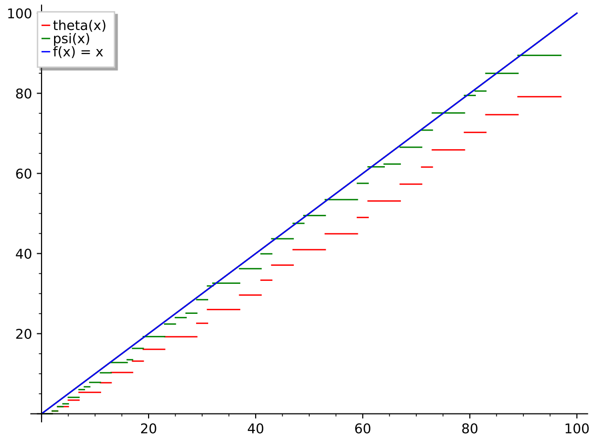
- li(x) approximiert $\pi(x)$ bei großen Werten besser als $x/\log(x)$

**Satz 3.7 (Landau-Symbol und der Primzahlsatz)**

Unter Anwendung des Landau Symbols sind die bisherigen Approximationen asymptotisch gleich:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim li(x)$$

## 3.7 Die Funktionen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$




**Definition 3.8 ($\vartheta(x)$-Funktion)**

Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

**Beispiel:**

$\vartheta(10) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7 \approx 5.35$

**Definition 3.9 ($\psi(x)$-Funktion)**

Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p = \sum_{\substack{p,k \geq 1 \\ p^k \leq x}} \log p = \sum_{\substack{x \geq 1 \\ p \leq x}} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p$$

**Beispiel:**

$\psi(10) = \log(2^3) + \log(3^2) + \log(5) + \log(7) = 3\log(2) + 2\log(3) + \log(5) + \log(7) \approx 7.83$

**Bemerkungen:**

- Für $x < 2$ gilt $\vartheta(x) = \psi(x) = 0$
- Für $x \geq 2$ gilt $0 < \vartheta(x) \leq \psi(x)$

**Satz 3.10 (Vergleich zwischen $\pi(x)$, $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$)**

$$\vartheta(x) \leq \psi(x) \leq \pi(x)\log(x) \text{ mit } x \geq 1$$

**Beweis 3.11.**
Die Ungleichung $\vartheta(x) \leq \psi(x)$ ist trivial. Die zweite Ungleichung wird mittels Umformung bewiesen:

$$\psi(x) = \sum_{\substack{x\geq 1\\ p\leq x}} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p \leq \sum_{\substack{x\geq 1\\ p\leq x}} \frac{\log x}{\log p} \log p = \sum_{\substack{x\geq 1\\ p\leq x}} \log x = \log x \sum_{p\leq x} 1 = \pi(x)\log x$$

□

**Satz 3.12 (Primzahlsatz mit $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$)**

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \Leftrightarrow \vartheta(x) \sim x \Leftrightarrow \psi(x) \sim x$$

**Bemerkung:**
- Anhand der Ungleichung kann gezeigt werden, dass die Grenzwerte der drei Funktionen gleich sind

## 3.8 Abschätzung von $\pi(x)$ anhand von $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$

### 3.8.1 Abschätzung von $\pi(x)$ nach oben

**Lemma 3.13 (Eigenschaften der Zahl M)**

Für $m \geq 1$ sei

$$M = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$$

Dan gilt:

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \mid M \text{ und } M < 4^m$$

**Beweis 3.14.**
- Mittels $(m+1)!$ und $m!$ können Komponenten aus $(2m+1)!$ herausgekürzt werden
- Primzahlen zw. $m+1$ und $2m+1$ aber nicht, dahert teilen diese M
- $M < 4^m$ kann durch eine einfache Abschätzung bewiesen werden

□

**Satz 3.15 (Abschätzung von $\vartheta(x)$)**

Für alle $x > 0$ gilt:

$$\vartheta(x) < \log(4x) \leq 1.3863 \cdot x$$

**Bemerkung**
- Beweis durch Umformung und Induktion

**Satz 3.16 (Resultat für $\pi(x)$)**

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} \leq \log(4) \leq 1.3863$$

**Bemerkung:**
- Beweis anhand der Abschätzung von $\vartheta(x)$ und einem Zusammenhang von $\pi(x)$ mit $\vartheta(x)$ und einem dazugehörigen Integral, sodass $\pi(x) \leq (x/\log(x)) \cdot \log(4) \cdot (1 + f(x))$ gilt
- $1+f(x)$ wird immer kleiner, sodass gilt man approximierne kann, dass $f(x)+1 = 2$ für $x \geq 125$ und $f(x) + 1 = 1.5$ für $x \geq 2Mio$ gilt

### 3.8.2 Abschätzung von $\pi(x)$ nach unten

**Lemma 3.17 (Eigenschaften der Zahl N)**

Für $n \geq 1$ sei

$$N = \binom{2n}{n}$$

Dann gilt:

$$N \mid kgV(1, 2, 3, .., 2n) \text{ und } N \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

**Bemerkung:**

- Beweis dazu ist sehr kompliziert

**Satz 3.18 (Abschätzung von $\psi(x)$)**

Für $x > 0$ gilt:

$$\psi(x) \geq \left(\log(2) - \frac{\log(4x+4)}{x}\right) \cdot x$$

**Bemerkungen:**

- Anhand der Zahl N kann $2n\log(2) - log(2n+1) \leq \psi(2n)$ gefolgert werden
- Durch Umformung kann wiederrum die Aussage dieses Satzes gefolgert werde
- Der Faktor vor x wird demnach immer größer, aber der Zuwachs nimmt ab: $\psi(x) \geq 0.5x$ mit $x \geq 30$ und $\psi(x) \geq 0.6x$ mit $x \geq 100$ und $\psi(x) \geq 0.69x$ mit $x \geq 5000$

**Satz 3.19 (Resultat für $\pi(x)$ von $\psi(x)$)**

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x} \geq \log(2) \geq 0.6931$$

**Bemerkungen:**

- Beweis geht direkt aus der Abschätzung von $\psi(x)$ hervor
- Damit gilt nun auch $\pi(x) \geq 0.5x$ mit $x \geq 30$ und $\pi(x) \geq 0.6x$ mit $x \geq 100$ und $\pi(x) \geq 0.69x$ mit $x \geq 5000$

### 3.8.3 Zusammenfassung der Abschätzungen

**Satz 3.20 (Abschätzung von $\pi(x)$)**

$$0.6 \cdot \frac{x}{\log(x)} \overset{x\geq 3}{\leq} \pi(x) \overset{x>1}{\leq} 1.5 \cdot \frac{x}{\log(x)}$$

**Bemerkung:**

- Indem man die kleinen Werte von x (also bis 2 Miollionen) nun nochmal explizit betrachtet hat, konnte man diese Abschätzung folgern
- Es gibt auch bessere Abschätzungen

## 3.9 Anwendung von $\vartheta(x)$ auf die p-adische Bewertung

**Satz 3.21 (P-adische Bewertung und Fakultät)**

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$v_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

**Beispiel:**

Kombiniert man diesen Satz mit der p-adischen Bewertung von 5, so kann man die Nullen am Ende von $n!$ berechnen:

$$v_5(10000!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{10000}{5^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{625} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{3125} \right\rfloor = 2099$$

Somit ist die $v_5(10000!) = 2099$ und 10000! hat 2099 Nullen am Ende

**Bemerkung:**

- Beweis anhand der Zahl M und durch Umformung

## 3.10 Verbesserte Abschätzung der nten Primzahl

**Satz 3.22 (Abschätzung der nten Primzahl)**

Für die nte Primzahl $p_n$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$0.666n\log(n) \leq p_n \leq 2.165n\log(n)$$

**Bemerkung:**

- Geht aus der Abschätzung von $\pi(x)$ hervor

## 3.11 Meine Persönliche Abschätzung

$$\pi(x) \approx \left(\frac{1}{log_{pi}(x)} + 1\right) \cdot \frac{x}{\log(x)}$$

## 3.12 Das Bertransche Postulat

**Satz 3.23 (Bertrandsches Postulat)**

Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.

**Bemerkungen:**

- Beweis ist kompliziert und lang, baut auf der Zahl N und daraus folgenden Abschätzungen für die Summe von log(p) zw. n und 2n auf
- Diese Summe ist für alle $n \neq 119$ größer als 0, der Rest konnte durch ausprobieren bewiesen werden
- Somit gilt auch: Ist $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ die Primzahlfolge, so gilt für alle r:$p_{r+1} < 2p_r$
- Somit gilt auch: $\pi(2x) > \pi(x) \forall x \geq 1$
- Es gilt sogar $n < p < 2n$

# 4 Weitere Summenfunktionen

## 4.1 Partielle Summation

**Satz 4.1 (Partielle Summation)**

Sei $a_n$ eine Folge komplexer Zahlen mit $x \in \mathbb{R}$, sodass

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

Zudem sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $x \geq n_0$, sodass $a_n = 0$ für alle $n < n_0$ gilt und sei $b(x)$ stetig differenzierbar für alle $x \geq n_0$, dann gilt:

$$\sum_{n_0 \leq n \leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_{n_0}^{x} A(t)b'(t)dt$$

**Beispiel:**

Wähle man:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls n prim ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \pi(x)$$

Wählt man zudem $b(x) = log(x)$ mit $b'(x) = 1/x$ so erhält man:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log(p) = \sum_{n \leq x} a_n b(n) = \pi(x)\log(x) - \int_1^x \pi(t) \cdot \frac{1}{t} dt$$

**Bemerkung:**

- $n_0 = 1$ ist der in Zahlentheorie meistens betrachtete Spezialfall
- Wenn man für eine Summe über $b(x)$ die Partielle Summation anwenden will, muss man ein $a(x)$ finden, sodass sich der Wert der Summe nicht verändert
- Beweis durch Umformung

## 4.2 Die Summenfunktion des Kehrwertes der natürlichen Zahlen

**Definition 4.2 (Eulersche Konstante)**

Die Eulersche Konstante $\gamma$ wird definiert als:

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \approx 0.57721566490...$$

**Bemerkung:**

- Das dazugehörige uneigentliche Integral (da es gegen unendlich geht) existiert und der Grenzwert kann berechnet werden

**Satz 4.3 (Wachstum der Summenfunktion des Kehrwertes der natürlichen Zahlen)**

Für $x \geq 1$ gilt:

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log(x) - \gamma \right| \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log(x) + \gamma + O(\frac{1}{x})$$

Dadurch kann abgeleitet werden, dass für $N \geq 1$ gilt:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log(N) = \gamma$$

**Beweis 4.4.**

- Partielle Summation für den Kehrwert der natürlichen Zahlen berechnen
- Die erhaltene Formel umformen, bis sie das uneigentliche Integral von $\gamma$
- Fehlerabschätzung für den Rest neben $\log(x) + \gamma$

□

## 4.3 Summenfunktion über den Logarithmus

**Satz 4.5 (Wachstum der Summenfunktion über den natürlichen Logarithmus)**

Für $x \geq 1$ mit einer Funktion $| b(x) | \leq 1$ gilt:

$$\left| \sum_{n \leq x} \log(n) - (x \log(x) - x + 1) \right| \leq \log(x) \Rightarrow \sum_{n \leq x} \log(n) = x \log(x) - x + O(\log(x))$$

## 4.4 Die Mangoldt Funktion

**Definition 4.6 (Mangoldt's Λ Funktion)**

Die Mangoldt Funktion $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} log(p), & n = p^k \\ 0, & sonst \end{cases}$$

**Beispiel:**

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda(n)$ | 0 | log(2) | log(3) | log(2) | log(5) | 0 | log(7) | log(2) | log(3) | 0 | log(11) |

**Satz 4.7 ($\Lambda(x)$ mit $\psi(x)$ und $\log(n)$)**

Es gilt:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \text{ und } \sum_{n \leq x} \log(n) = \sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \Lambda(n)$$

**Satz 4.8 (Wachstum der Λ Funktion)**

Für $x \geq 1$ gilt:

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log(x) \right| \leq 1.2 \Rightarrow \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log(x) + O(1)$$

**Bemerkung:**
- Beweis anhand der Summenfunktion über den Logarithmus, Umformung und Abschätzung

**Satz 4.9 (Zusammenhang der $\Lambda$ Funktion mit dem Primzahlsatz)**

Existiert der erste Grenzwert, so gelten die daraus folgenden Implikationen:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\log(x)\right)\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1\Rightarrow \pi(x)\sim\frac{x}{\log(x)}$$

**Bemerkungen:**
- Der Grenzwert existiert, wenn $\psi(x) = x + O(x^a)$ für $a < 1$ jedoch ist kein derartiges $a$ gefunden
- Die Rückrichtung dieser Implikationen konnte auch bewiesen werden

## 4.5 Summe der Kehrwerte der Primzahlen

**Satz 4.10 (Wachstum einer Primzahlensummenfunktion)**

Für $x \geq 1$ gilt:

$$\left|\sum_{p\leq x}\frac{\log(p)}{p}-\log(x)\right|\leq 2\Rightarrow\sum_{p\leq x}\frac{\log(p)}{p}=\log(x)+O(1)$$

**Bemerkung:**
- Dieser Zusammenhang wurde benutzt um das Wachstum der Summe der Kehrwerte der Primzahlen zu beweisen

**Satz 4.11 (Wachstum der Summe der Kehrwerte der Primzahlen)**

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $x \geq 2$ dann gilt:

$$\left|\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}-\log\log(x)-c\right|\leq\frac{4}{\log(x)}\Rightarrow\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}=\log\log(x)+c+O(\frac{1}{\log(x)})$$

## 4.6 Primzahlproduktfunktion

**Satz 4.12 (Wachstum der Primzahlprodukfunktion)**

Gegeben seien die beiden konvergierenden Funktionen

$$c_1=\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}-\log\log x\right)\text{ und }c_2=\sum_{p}\left(\log\frac{1}{1-\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}\right)$$

Zudem sei $x \geq 2$, dann gilt:

$$\left|\prod_{p\leq x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}-e^{c_1+c_2}\cdot\log(x)\right|\leq 16366\Rightarrow\prod_{p\leq x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=e^{c_1+c_2}\cdot\log(x)+O(1)$$

**Satz 4.13 (Vereinfachung des Wachstums der Primzahlprodukfunktion)**

Sei $x \geq 2$ so gilt:

$$\left|\prod_{p\leq x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}-e^{\gamma}\cdot\log(x)\right|\leq 16366\Rightarrow\prod_{p\leq x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}-\sim e^{\gamma}\cdot\log(x)$$

## 4.7 Das Dirichletsche Teilerproblem

**Definition 4.14 (Teilerzählfunktion $\tau(n)$)**

Sei n eine natürliche Zahl, dann ist $\tau(n)$ definiert durch:

$$\tau(n) = \#\{d \in \mathbb{N} : d|n\} = \sum_{d|n} 1$$

**Satz 4.15 (Berechnung der Anzahl der Teiler anhand der Faktorisierung)**

Die natürliche Zahl n habe die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{e_1}, \ldots, p_r^{e_r}$. Die Anzahl der Teiler lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$\tau(n) = (e_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_r + 1)$$

**Satz 4.16 (Wachstum von $\tau(n)$)**

Es gilt:

$$\sum_{n \le x} \tau(n) = \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$$

Damit kann das Wachstum abgeschätzt werden:

$$\sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log(x) + O(x)$$

**Bemerkung:**

- Dirichlet konnte diese Abschätzung noch weiter präzisieren

## 4.8 Anzahl verschiedener Primteiler

**Definition 4.17 (Primteilerzählfunktion)**

Sei n eine natürliche Zahl, dann ist $\omega(n)$ definiert durch:

$$\omega(n) = \#\{p : p|n\} = \sum_{p|n} 1$$

**Satz 4.18 (Abschätzung von $\omega(x)$)**

Für $n \ge 3$ gilt:

$$\omega(n) \le 3.421 \cdot \frac{\log(n)}{\log\log(n)}$$

**Satz 4.19 (Abschätzung der durchschnittlichen Anzahl an Primteilern)**

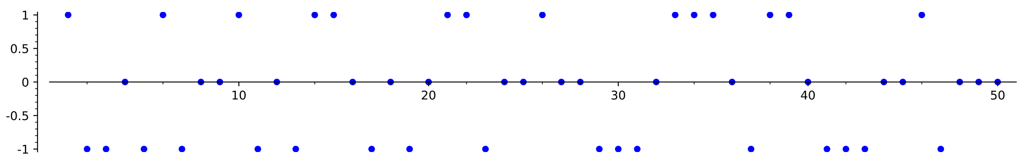
Bekannt ist der Grenzwert:

$$c = \lim_{x \to \infty} \left( \sum_{p \le x} \frac{1}{p} - \log\log(x) \right) \approx 0.2615$$

dann gilt für $x \ge 2$:

$$\left| \frac{1}{x} \sum_{n \le x} \omega(n) - \log\log(x) - c \right| \le \frac{5.6}{\log(x)} \Rightarrow \frac{1}{x} \sum_{n \le x} \omega(n) = \log\log(x) + c + O(\frac{1}{\log(x)})$$

# 5 Die Möbius-Funktion



Die Möbius-Funktion im Intervall $[1,50]$ geplottet mit dem sage Befehl plot(moebius,1,50,linestyle='',figsize=[16,4])

**Definition 5.1 (Möbius-Funktion)**

Die Möbius-Funktion $\mu(n)$ ist folgendermaßen definiert:

$$\mu(p_1^{e_1}...p_r^{e_r}) = \begin{cases} (-1)^{e_1+...+e_r}, & \text{falls } e_i \in \{0,1\} \text{ für } i = 1,...,r \\ 0, & \text{falls } e_i \geq 2 \text{ für ein } i \in \{1,...,r\} \end{cases}$$

**Beispiel:**

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu(n)$ | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 |

**Satz 5.2 (Möbiusfunktion und Teiler)**

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0 \text{ für } n > 1$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} n = 2 \quad & \mu(1) + \mu(2) = 1 - 1 = 0 \\ n = 3 \quad & \mu(1) + \mu(3) = 1 - 1 = 0 \\ n = 4 \quad & \mu(1) + \mu(2) + \mu(4) = 1 - 1 + 0 = 0 \end{aligned}$$

**Beweis 5.3.**

- Enthält die Zahl n eine Primzahl mit Potenz $> 1$ gilt der Satz trivialerweise
- Sei n eine zusammengesetzt Zahl mit zueinander verschiedenen Primzahlen $p_1, ..., p_n$ als Teiler
- Bildet man nun die multiplikative 2er, 3er, 4er,...,n-er Konkatinationen dieser Primzahlen und fügt die 1 hinzu, so erhält man die Teilermenge von n
- Die Anzahl der 2er, 3er,...,n-er Konkatinationen kann mit dem Binomialkoeffizienten beschrieben werden:
$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n} \text{ mit } \binom{n}{0} = 1$$
- Anhand der Definition der Möbius-Funktion kann man erkennen, dass alle ungeraden Konkatinationen zu -1 auswerten und alle gerade Konkatinationen zu 1. Damit kann man die alternierende Summe schreiben als:
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = (1-1)^n = 0$$
- Die Auswertung zu 0 gilt anhand des binomischen Lehrsatzes

□

## 5.1 Möbiussche Umkehrfunktion

**Satz 5.4 (Möbiussche Umkehrfunktion)**

Sind $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ arithmetische Funktion, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$b(n) = \sum_{d|n} a(d) \Leftrightarrow a(n) = \sum_{d|n} \mu(d) b(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) b(d) = \sum_{k \cdot l = n} \mu(k) b(l)$$

**Bemerkung:**

- Definiert man $a(2) = a(3) = .... = 0$ so ist $a(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot c = 0$ mit c als Konstante $c = a(1) = b(n)$

# 6 Dirichlet Reihen

## 6.1 Grundlagen Dirichlet-Reihe

**Definition 6.1 (Dirichlet-Reihen)**

Sei $a(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion und sei $s \in \mathbb{C}$ mit $s = \sigma + i \cdot t$, dann ist eine Dirichlet-Reihe definiert durch:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a(n)}{n^s}$$

**Definition 6.2 (Potenzieren mit $s$)**

Für $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ und $s = \sigma + i \cdot t$ ist die Potenz definiert durch:

$$x^s = e^{s \log(x)}$$

Insbesonders gilt für ein $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n^s} = e^{-(\sigma + i \cdot t) \log(n)} = \frac{1}{n^\sigma}(\cos(t \log(n))) - i \sin(t \log(n)))$$

Damit gilt für Real und Imaginärteil:

$$Re(\frac{1}{n^s}) = \frac{\cos(t \log(n))}{n^\sigma} \text{ und } Im(\frac{1}{n^s}) = -\frac{\sin(t \log(n))}{n^\sigma}$$

Für den Absolutbetrag erhält man anhand von $|e^{-it \log(n)}| = 1$ folgendes:

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma} = e^{-Re(s) \log(n)}$$

## 6.2 Konvergenz von Dirichlet-Reihen

**Satz 6.3 (Konvergenzkriterium von Dirichlet-Reihen)**

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a_n = O(n^a)$ so konvergiert eine Dirichletreihe für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 1 + a$ absolut

**Beispiel:**

Die Dirichletreihe mit $a_n = 1$ erfüllt das Lemma mit $a = 0$, insofern $Re(s) > 1$. Diese Reihe definiert übrigens auch die Riemannsche Zeta-Funktion:

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

**Satz 6.4 (Absolute Konvergenzabszisse)**

Zu einer Dirichletreihe gibt es ein $\sigma_a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sodass gilt:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert absolut für } Re(s) > \sigma_a \\ \text{konvergiert nicht absolut für } Re(s) < \sigma_a \end{cases}$$

$\sigma_a$ nennt man dass absolute Konvergenzabszisse. Hierbei wird $|a(n)|$, also der Betrag, betrachtet.

**Satz 6.5 (Dirichletreihen und beschränkte Partialsummen)**

Hat eine Dirichletreihe für $s = s_0 = \sigma_0 + it_0$ eine beschränkte Partialsumme, so konvergiert die Reihe gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $\{s = \sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$. Diese Voraussetzung ist besonders dann erfüllt, wenn die Dirichletreihe für $s = s_0$ konvergiert.

**Satz 6.6 (Konvergenzabszisse)**

Zu einer Dirichletreihe gibt es ein $\sigma_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sodass gilt:

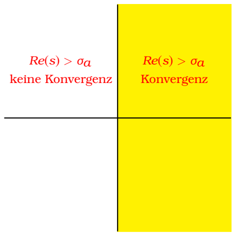
$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert für } \sigma > \sigma_a \\ \text{divergiert für } \sigma < \sigma_a \end{cases}$$

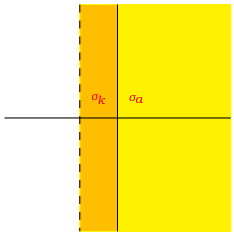
$\sigma_k$ heißt Konvergenzabszisse. Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge der Halbebene $\{\sigma > \sigma_k\}$.

**Satz 6.7 (Zusammenhang zwischen den Abzissen)**

Sei $\sigma_a$ die absolute Konvergenzabszisse und $\sigma_k$ die Konvergenzabszisse einer Dirichletreihe, dann gilt:

$$\sigma_k \leq \sigma_a \leq \sigma_k + 1$$




**Beispiel:**
Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnet werden sollen die Abzissen der Dirichletreihe:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^s}$$

- $a = 0$: Die Reihe ist identsich zu 0, daher gilt $\sigma_k = \sigma_a = -\infty$
- Für $|a| > 1$ divergiert die Dirichletreihe, daher gilt $\sigma_k = \sigma_a = \infty$
- Für $a = 1$ erhält man die Reihe der Riemannschen Zeta-Funktion:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

- Die Reihe divergiert für $Re(s) = 1$ da man somit die divergente harmonische Reihe hat. Selbiges gilt also auch für $Re(s) < 1$. Ist $Re(s) > 1$ konvergiert die Reihe, womit $\sigma_a = 1$ gilt. Anhand des Zusammenhangs der Abszissen kann man nun Testen, ob für ein $\sigma_k < 1 = \sigma_a$ die Reihe konvergiert. Da dies nicht der Fall ist gilt $\sigma_k = \sigma_a = 1$
- Für $a = -1$ erhält man die folgende Dirichletreihe:

$$-\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

- Man kann das Vorzeichen ignorieren. Die Argumentation für $\sigma_a = 1$ bleibt die gleiche. Anhand des Satzes über beschränkte Partialsummen kann nun ein $\sigma_k < \sigma_a$ gefunden werden: Mit $s = 0$ hat man eine beschränkte Partialsumme, somit konvergiert die Reihe für $\sigma > 0$ und $\sigma_k = 0$. Daraus folgt: $\sigma_k < \sigma_a = \sigma_k + 1$

## 6.3 Differenzieren von Dirichlet-Reihen

**Definition 6.8 (Differenzieren von Dirichlet-Reihen)**

Für den Konvergenzbereich $Re(s) > \sigma_k$ einer Dirichletreihe gild für die gliedweise Differenzierung:

$$f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s} \Rightarrow f'(s) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\log(n) \cdot a(n)}{n^s} \Rightarrow f^{(k)}(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-\log(n))^k \cdot a(n)}{n^s} \text{ für } k \geq 0$$

**Bemerkungen:**

- Herleitung dieser Regel anhand der Regeln der komplexen Potenzierung von $s$ und der holomorphen Eigenschaften die daraus entstehen

- Die Ableitung ist wieder eine Dirichletreihe und konvergiert ebenfalls im Konvergenz der ursprünglichen Funktion

## 6.4 Nullstellen von Dirichlet-Reihen

**Satz 6.9 (Grenzwertbetrachtung von Dirichlet-Reihen)**

Sei $s_k$ eine Folge komplexer Zahlen und f eine Dirichletreihe dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} Re(s_k) = \infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(s_k) = a(1)$$

**Bemerkungen:**

- Die Dirichletreihe konvergiert also gegen $a(1)$
- Darauf folgt: Gilt $f(s_k) = 0$ und $\lim_{k\to\infty} Re(s_k)$ für eine komplexe Zahlenfolge, so gilt $a(n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$
- Da Dirichletreihen gleichmäßig konvergieren, kann man folgern, dass es ab einem gewissen Punkt $Re(s_i)$ keine Nullstellen mehr gibt, man somit eine Halbebene innerhalb des Konvergenzbereiches hat, indem es keine Nullstellen gibt (Solange die Dirichletreihe keine Nullreihe ist)

**Satz 6.10 (Identitätssatz für Dirichlet-Reihen)**

Seien $f(s)$ und $g(s)$ zwei Dirichletreihen:

$$f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s} \text{ und } g(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{b(n)}{n^s}$$

Sei $s_k$ eine Folge komplexer Zahlen mit $f(s_k) = g(s_k)$ und $\lim_{k\to\infty} Re(s_k) = \infty$, so gilt $a(n) = b(n) \forall n \in \mathbb{N}$

**Berechnung von Nullstellen:**

Ansonsten berechnet man die Nullstellen einer Dirichletreihe indem man die Reihe gleich 0 setzt und nach s auflöst. Beispiel: Berechnung der Nullstellen der folgenden Dirichlet-Reihe $1 + \frac{1}{3^s}$:

$$0 = 1 + \frac{1}{3^s} \Leftrightarrow 1 = -3^s \Leftrightarrow 1 = -e^{s\log(3)} \Leftrightarrow 1 = e^{i\pi} \cdot e^{s\log(3)} \Leftrightarrow 1 = e^{i\pi + s\log(3)}$$

$$\Leftrightarrow 2i\pi \cdot k = i\pi + s\log(3) \Leftrightarrow s = \frac{(2\cdot k - 1)\cdot i \cdot \pi}{\log(3)}$$

Somit beschreibt $s_k = \frac{(2\cdot k-1)\cdot i\cdot\pi}{\log(3)}$ die komplexe Zahlenfolge mit Nullstellen der Dirichletreihe. Die Umformung von -1 zu $e^{i\pi}$ geht aus der Eulerschen Identität hervor: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

**Bemerkungen:**

- Solange der Wertebereich von k unendlich groß ist, hat die Dirichletreihe auch unendlich viele Nullstellen
- Falls vor dem Logarithmus im Nenner ein Faktor ist, dann hat man keine Nullstellen für die k, die durch einen/mehrere Primfaktoren des Faktors teilbar sind

## 6.5 Multiplikation von Dirichlet-Reihen

**Satz 6.11 (Multiplikation von Dirichlet-Reihen)**

Gibt es zwei Dirichlet-Reihen, die beide in einer Halbebene absolut konvergieren, so können diese innerhalb dieser Menge miteinander multipliziert werden. Seien $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ Funktionen, dann gilt:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{b(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{c(n)}{n^s} \text{ mit } c(n) = \sum_{kl=n} a(k)b(l) = \sum_{d|n} a(d)b(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} a(\frac{n}{d})b(d)$$

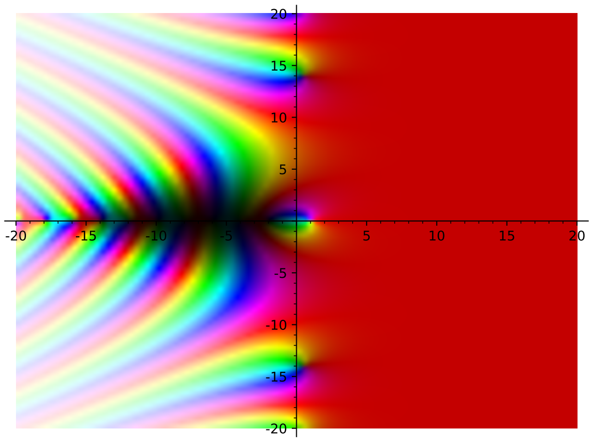
Dabei ist die Zuordnung $(a, b) \to c$ eine arithmetische Faltung und wird als $c = a * b$ geschrieben.

**Beispiel:**

Für $Re(s) > 1$ gilt:

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sum_{d|n} 1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

## 6.6 Grundlegendes zur Zeta Funktion




Die Zeta Funktion in der komplexen Zahlenebene geplottet durch den Sage Code complex_plot(zeta,(-20,20),(-20,20))

**Definition 6.12 (Zeta Funktion)**

Die Zeta-Funktion ist definiert durch:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots$$

**Satz 6.13 (Zeta-Funktion und die Möbius-Funktion)**

Die Dirichlet-Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

hat die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a = 1$. Für $Re(s) > 1$ gilt daher:

$$\zeta(s) \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

**Bemerkung:**

- Beide Funktionen haben keine Nullstelle in der Halbebene $Re(s) > 1$

**Satz 6.14 (Zeta-Funktion und die Mangold-Funktion)**

Für die Mangold-Funktion gilt:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = log(n)$$

Daraus kann man für $Re(s) > 1$ durch Umformung folgern:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$