

Einführung

- Ereignis:
- ⇒ Eine Situation, von der man nicht sicher vorhersagen kann, ob sie eintreten wird oder nicht.
- Wahrscheinlichkeit:
- ⇒ Eine zahlenmäßige Bewertung der Chance, dass das Ereignis eintreten wird. → Zufallsexperiment:
- ⇒ Experiment, dass man beliebig oft durchführen kann, wobei jedes mal der Ausgang nicht vorhersagbar ist
- Häufigkeit:
- ⇒ Wir oft ein Ergebnis eintritt
- ⇒ relative Häufigkeit: Eintreten eines Ergebnisses durch die Anzahl der Durchführungen

Gesetz der Großen Zahlen

- Führt man ein Zufallsexperiment N-mal durch, wobei N groß ist, so stabilisiert sich die relative Häufigkeit immer bei einer für das Ergebnis E charakteristischen Zahl P(E)

Beschreibende Statistik

- Datensatz:
- ⇒ Aus einer Messung/Beobachtung entstandenen Daten
- Stichprobe:
- ⇒ Datensatz entstand aus gezielter Teilerhebung

- Nominale Daten:
- ⇒ qualitative Ausprägung ohne natürliche Ordnung
- Ordinal:
- ⇒ qualitative Ausprägung mit natürlicher Ordnung
- Metrisch/rational:
- ⇒ Ausprägung, durch die eine Zahl beschrieben werden kann

- Statistik:
- ⇒ Kompromierung und oder graphische Darstellung eines Datensatzes
- Ordnungsstatistik:
- ⇒ geordneter Datensatz mit Indizes
- ⇒ Erster Rang ist Minimum, letzter ist Maximum

- Rangberechnung:
- ⇒ einzelner Wert: $R(x_i) = i$
- ⇒ mehrfacher Wert: Minimum: x_r Maximum: x_{r+s-1}
- ⇒ $R(x_i) = r + (s - 1)/2$

- kumulierte Häufigkeit:
- ⇒ Summe der Häufigkeiten einer Ausprägung

- Histogramm:
- ⇒ Die Werte der Stichproben werden zu Klassen zusammengefasst, die ein Intervall $[a, b)$ haben
- ⇒ Spannweite ist die Größe des Intervalls
- ⇒ Im Histogramm wird die Summe der Datensätze des Intervalls eingezeichnet
- ⇒ x- Achse = Häufigkeit
- ⇒ y- Achse = Klassennummer

Mittelwertberechnung (arithmetisches Mittel):

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

Medianberechnung:

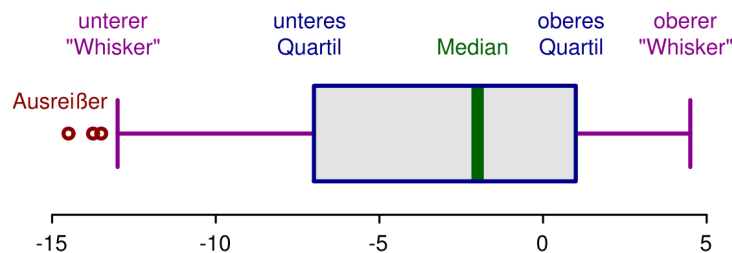
$$f(x) = \begin{cases} x_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} & , n = \text{gerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}) & , n = \text{ungerade} \end{cases}$$

Quartilenberechnung:

$$f(x) = \begin{cases} x_{\lceil n \cdot \frac{p}{100} \rceil} & , n \cdot \frac{p}{100} = \text{rational} \\ \frac{1}{2}(x_{\lfloor n \cdot \frac{p}{100} \rfloor} + x_{\lfloor n \cdot \frac{p}{100} \rfloor + 1}) & , n \cdot \frac{p}{100} = \text{ganzzahlig} \end{cases}$$

- ⇒ 25% Quartil == unteres Quartil
- ⇒ 75% Quartil == oberes Quartil
- ⇒ Interquartilabstand: oberes minus unteres Quartil

Boxplot:



Streuung / Standardabweichung:

$$\sigma_x^n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)}$$

empirische Kovarianz:

- ⇒ Gegeben: $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$
- ⇒ empirischer Korrelationskoeffizient: $r_{xy} := s_{xy} / s_x s_y$

$$s_{xy} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (x_i y_i) - n \bar{x} \bar{y} \right)$$

Zufallsexperimente

- Bernoulli-Experiment:
- ⇒ Zwei mögliche Ausgänge
- ⇒ Ausgänge gleich wahrscheinlich

- Laplace-Experiment:
- ⇒ endlich viele Ausgänge
- ⇒ Ausgänge sind gleichwertig

Wahrscheinlichkeitsmodelle

Die Bausteine

- Ergebnismenge
- Ereignis-System \mathcal{A}
- Wahrscheinlichkeit P

Ergebnismenge Ω

- nicht leere Menge
- Gibt die möglichen Ergebnisse an

Zusammengesetzte Ereignisse

- Häufig werden Beobachtungen kombiniert
- kartesisches Produkt der Ereignisse:
 - ⇒ Mengen $\Omega_1, \dots, \Omega_2$
 - ⇒ kartesisches Produkt: $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_2$
 - ⇒ Zusammenfassung von Ereignismengen
 - ⇒ Z.b. mehrfaches Werfen eines Würfels

Ereignisse

- Ereignis A ist Teilmenge von Ω
- Die Menge aller Ereignisse heißt Ereignissystem \mathcal{A}
- $A = \emptyset$ = unmögliches Ereignis
- $A = \Omega$ = Ereignis tritt immer ein
- Gesamtheit aller Teilmengen = Potenzmenge von Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$
- Mächtigkeit des Ereignisraum: $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$

Ereignissystem \mathcal{A}

- Abgeschlossenes Mengensystem \mathcal{A} über Ω benötigt:
 - ⇒ $\Omega \in \mathcal{A}$
 - ⇒ $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
 - ⇒ $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
 - Ω ist endlich / abzählbar
 - ⇒ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
 - Ω ist unendlich:
 - ⇒ $\mathcal{A} = \mathbb{R}$
 - Wichtig: Wenn Ereignis Ausgeschlossen: Potenzmenge ohne Ereignis

Ereignisdarstellung durch Zufallsvariablen

- Abbildung von einer Ergebnismenge Ω mit Ereignissystem \mathcal{A} in eine Bildmenge Ω' mit Ereignissystem \mathcal{A}'
- Zufallsvariablen werden meist mit X, Y, Z, U, V, W bezeichnet
- Ereignisse werden meist mit A, B, C bezeichnet
- Zufallsvariablen werden verwendet um enthaltene Informationen zu komprimieren / auszuwählen

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

- Wahrscheinlichkeit von A : $P(A)$
- Berechnung: 1 / Anzahl der Ereignisse
- Eigenschaften:
 - ⇒ $0 \leq P(A) \leq 1$
 - ⇒ $P(\Omega) = 1$ und $P(\emptyset) = 0$
 - ⇒ $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$
- Rechenregeln:
 - ⇒ $P(A^c) = 1 - P(A)$
 - ⇒ $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$
 - ⇒ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
 - ⇒ $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
 - ⇒ $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten

Für stochastisch Abhängige Ereignisse gilt:

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B))$

Formel von Bayes:

- Gilt für Abhängige Ereignisse und abzählbare Zerlegungen von Ω

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i \in I} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Stochastische Unabhängigkeit:

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(AB) = P(A)P(B)$
- $P(AB) = P(A)P(B)$

Beispiel

Würfelwurf:

- A definiert Wahrscheinlichkeit einer 1
- Ereignismenge: $\Omega = \{1, \dots, 6\}$
- Ereignissystem: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- Wahrscheinlichkeit: $P(A) = 1/6$ bzw. $P(A) = A/|\Omega|$

Wahrscheinlichkeitsmaße

Diekrete W-Maße und Zähl-dichte

Zähl-dichte Eigenschaften:

- Gegeben: P ist W-Maß über (Ω, \mathcal{A}) und $f(\omega) = P(\{\omega\})$:
 - ⇒ $f(\omega) \geq 0 (\omega \in \Omega)$
 - ⇒ $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$
 - ⇒ Jedes Ereignis ist wahrscheinlich und die Summe der Ereignisse ist 1
 - ⇒ W-Maß = Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten
 - ⇒ Z-Dichte = Arbeiten mit Funktion für Wahrscheinlichkeiten

Binomial Z-Dichte:

- Gegeben: $p, q \geq 0$ und $p + q = 1$ und $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$

$$f(k) = b(n, p; k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Geometrische Z-Dichte:

- Gegeben: $0 < q < 1$ und $\Omega = \{0, 1, \dots\}$

$$f(k) = (1 - q)q^k$$

Poisson Z-Dichte:

- Gegeben: $\lambda \in (0, \infty)$ und $\Omega = \{0, 1, \dots\}$

$$f(k) = \pi(\lambda; k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Hinweise:

- Zähl-dichte der Häufigkeitsverteilung: Vorkommen eines Ereignisses durch Gesamtzahl der Stichproben
- Träger ist Teilmenge von Ω , wobei für alle Ereignisse aus dem Komplement des Trägers die Wahrscheinlichkeit 0 gilt. D.h. Träger enthält alle relevanten Ereignisse mit relevanten Wahrscheinlichkeiten.

Stetige W-Maße und Riemann-Dichten

Riemann-integrierbare Funktion (Riemann-Dichte):

$$f(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Rechteck-Verteilung:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in (a, b) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Exponential-Verteilung ($\alpha > 0$):

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} 1_{(0, \infty)}(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Gaußverteilung (Normalverteilung $\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$):

→ Mittelwert: α und Streuung: σ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Gamma Verteilung ($\alpha, v > 0$):

$$\gamma(x) := \begin{cases} \frac{\alpha^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Gamma Funktion:

$$\Gamma(v) := \int_0^{\infty} (x^{v-1} e^{-x} dx), \quad v > 0$$

Eigenschaften:

$$\rightarrow \Gamma(1) = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\rightarrow \Gamma(v+1) = v \cdot \Gamma(v)$$

$$\rightarrow \Gamma(v) = (v-1)!, \quad v \in \mathbb{N}$$

Beta(μ, v)-Verteilung:

$$b_{e_{\mu, v}}(x) := \begin{cases} \frac{\Gamma(\mu+v)}{\Gamma(\mu)\Gamma(v)} x^{\mu-1} (1-x)^{v-1} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion

Definition:

$$F(x) := P((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

Berechnung der Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad \text{und} \quad P((a, b]) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Eigenschaften:

→ F ist monoton nicht fallend

→ $F(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = 1$

→ F ist rechtsseitig stetig

→ F besitzt linksseitige Grenzwerte

→ Für Einpunktmengen gilt: $P(\{x\}) = F(x) - F(x-)$

Mehrstufige W-Modelle

Versuchsdurchführungen können gekoppelt sein, wobei ein Versuch von allen bzw. einer Teilmenge von Vorversuchen abhängig ist. Dies kann die Wahrscheinlichkeit ändern.

Koppelung stetiger Modelle

→ Die Z-Dichte muss Riemann-Integrierbar sein:

$$f(x_1, \dots, x_n) := f_1(x_1) \cdots f_n^{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; x_n)$$

Unabhängige Koppelung

Beispiel: Münzwurf

Hierbei berechnet man eine Produktdichte:

$$f(\omega_1, \dots, \omega_n) = f_1(\omega_1) \cdot f_2(\omega_2) \cdots f_n(\omega_n)$$

Vereinfachte Formel für n-faches Bernoulli-Experiment:

$$f(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{mit} \quad k = \sum_{i=1}^n \omega_i$$

Vereinfachte Formel für Standard-Normalverteilung:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

Zufälliges Ziehen ohne Zurücklegen

→ Beispiel für eine Markow-Koppelung. Hierbei hängt die Wahrscheinlichkeit bei einmal ziehen nur von dem dazugehörigen Zustand ab, und nicht von mehreren. Keine Markow-Kopplung wäre demnach bei einem Münzwurf zu gewinnen, wenn man drei mal hintereinander Kopf hat

Anzahl der möglichen Permutationen:

→ Gegeben: n Objekte aus N Objekten

→ Es gilt $(N)_0 = 1$ und $(n)_n = n!$

$$|\Omega_{\neq}| = N \cdot (N-1)(N-2)\dots(N-n+1) := (N)_n$$

Anzahl möglicher Kombinationen:

$$|\Omega'| = \frac{(N)_n}{n!} =: \binom{N}{n}$$

Verallgemeinerung:

$$f(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n}, \quad \text{mit} \quad k = \sum_{i=1}^n \omega_i$$

$$P(B_k) = \binom{n}{k} \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n}, \quad \text{mit} \quad k = \sum_{i=1}^n \omega_i$$

Zufallsvariablen und Bildmodelle

Zufallsvariable X fasst ein oder mehrere Ereignisse eines Zufallsexperimentes zusammen.

Beispiel Würfelwurf:

→ Wahrscheinlichkeitsraum: (Ω, Σ, P)

→ Ω ist die Menge der 36 Ereignisse

→ Σ ist die Potenzmenge von Ω

→ $P(\{n_1, n_2\}) = 1/36$ mit $n \in \{1, \dots, 6\}$

→ X_1 Zufallsvariable für ersten Würfel

→ X_2 Zufallsvariable für zweiten Würfel

→ S Zufallsvariable für Summe der Würfel

Hinweis: Eine Zufallsvariable ordnet jedem Ereignis aus Ω einen Reellen Wert zu

Bildmodelle und Verteilung von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen lassen sich in Funktionen überführen, Beispiel Münzwurf: Es gilt: $\omega_i \in \Omega$

$$f^X(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{für } \omega = \text{Kopf} \\ 1 & \text{für } \omega = \text{Zahl} \end{cases}$$

Bildmodelle für diskrete Verteilung

Hypergeometrische Verteilung:

Beispiel Urnenmodell: N = Gesamtanzahl Kugeln, K = Anzahl Kugeln mit Eigenschaft, k = gesuchte Anzahl, n = Stichprobengröße:

$$h(N, K, n; k) := f^{Z_n}(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Binomial-Verteilung:

Beispiel Würfelwurf: n = Stichprobengröße, k = Anzahl Erfolge, p = Erfolgswahrscheinlichkeit:

$$b(n, p; k) := f^{S_n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n$$

Geometrische Verteilung:

Wahrscheinlichkeit, dass der erste Erfolg beim k-ten mal passiert:

$$geo^+(p; k) := pq^{k-1}, k \in \mathbb{N}$$

Negative Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeit, dass man k Versuche braucht, bis man r Erfolge hat:

$$f^{W_r}(k) = nb^+(r, p; k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, k = r, r+1, \dots$$

Bildverteilung stetiger W-Dichten

Wenn gilt: $Y = a + bX$, P^X bekannt ist und eine Verteilung über (\mathbb{R}, \mathbb{B}) ist mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b! = 0$, dann gilt für Verteilungsfunktionen:

$$F^Y(y) = F^X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Für R-Dichten gilt:

$$f^Y(y) = \frac{1}{b} f^X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Randverteilungen

Randverteilung Gegebene Tabelle:

t	Z-Dichte $f(t, d)$				$\Sigma = f^T(t)$
	d = 5	d = 10	d = 15	d = 20	
1	0,06	0,12	0,02	0,00	0,20
2	0,10	0,20	0,15	0,05	0,50
3	0,03	0,09	0,12	0,06	0,30
$\Sigma = f^D(d)$	0,19	0,41	0,29	0,11	$\Sigma = 1$

Rechts: Randverteilung von t

→ Unten: Randverteilung von d

→ Summe innerhalb der Randverteilungen ist 1

Stochastische Unabhängigkeit von ZV

Sind ZV Y_1, \dots, Y_n stochastisch unabhängig, dann sind auch folgende Spezifikationen stochastisch unabhängig:

→ Umstellung der ZV

→ Teilmengen der ZV

→ disjunkte Gruppen von ZV

→ messbare Funktionen mit den ZV

Außerdem gilt:

→ Jede konstante ZV ist von anderen ZV stochastisch unabhängig

Summenverteilung und Faltung

→ * bedeutet Faltung

Faltung bei Z-Dichten (abhängige ZV):

$$f^{X+Y}(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} f^{X,Y}(x, z-x), z \in \mathbb{Z}$$

Faltung bei R-Dichten (abhängige ZV):

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f^{X,Y}(x, z-x) dx, z \in \mathbb{R}$$

Faltung bei Z-Dichten (unabhängige ZV):

$$f^{X+Y}(z) = (f^X \star f^Y)(z) = \sum_{x=0}^z f^X(x) f^Y(z-x), z \in \mathbb{N}_0$$

Faltung bei R-Dichten (unabhängige ZV):

$$f^{X+Y}(z) = (f^X \star f^Y)(z) = \int_0^z f^X(x) f^Y(z-x) dx, z \geq 0$$

Faltung für Binomialverteilung:

$$B(n, p) \star B(m, p) = B(n+m, p)$$

Faltung für Poisson-Verteilung:

$$\pi(\lambda_1) \star \pi(\lambda_2) = \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Faltung für geometrische-Verteilung:

$$Nb^+(r_1, p) \star Nb^+(r_2, p) = Nb^+(r_1 + r_2, p)$$

Faltung für Normalverteilung:

$$\mathcal{N}(a, \sigma^2) \star \mathcal{N}(b, \tau^2) = \mathcal{N}(a+b, \sigma^2 + \tau^2)$$

Faltung für Gamma-Verteilung:

$$\Gamma_{\alpha, \mu} \star \Gamma_{\alpha, \nu} = \Gamma_{\alpha, \mu+\nu}$$

→ Spezialfall: $Exp(\alpha) = \Gamma_{\alpha, 1} \Rightarrow \Gamma_{\alpha, 2} = Exp(\alpha) \star Exp(\alpha)$

Quantile

α -Quantil:

$$F^X(u_{\alpha-}) \leq \alpha \leq F^X(u_{\alpha})$$

Berechnung Quantile der $\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$ -Verteilung:

$$u_{\beta}^{\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)} = \alpha - u_{\beta}^{\mathcal{N}(0,1)} \cdot \sigma$$

Erwartungswert

$$ZV : X = (X_1, \dots, X_2) \Rightarrow EX = (EX_1, \dots, EX_n)$$

Erwartungswert diskrete Modelle

$$\text{diskrete ZV: } X \geq 0 \Rightarrow EX := \sum_{k \in \Omega'} k \cdot P(X = k)$$

Hinweis:

Erwartungswerte diskreter Verteilungen: Formelsammlung
Für einen negativen ZV-Anteil: Funktion in positiv und negativ trennen und der Erwartungswerte einzeln berechnen

Eigenschaften des Erwartungswertes:

- Wahrscheinlichkeit für einen Punkt 1 $\Rightarrow EX =$ der Punkt
- Monoton: Zwei ZV: $X \leq Z \Rightarrow E(X) \leq E(Z)$
- linear: $E(aX + b) = a \cdot EX + b$
- Erwartungswert ist nicht unendlich: $E(X + Y) = EX + EY$
- Zwei ZV stochastisch unabhängig: $EXY = EX \cdot EY$

Erwartungswert stetiger Modelle

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f^X(x) dx$$

Hinweis:

Erwartungswert stetiger Verteilungen: Formelsammlung
Gemeinsame R-Dichten berechenbar über mehrfache Integrale

Streuung und Varianz

$$\text{Varianz: } Var(X) := E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

$$\text{Streuung: } Str(X) := \sqrt{E(X - EX)^2} = \sqrt{Var(X)}$$

Nützliche Rechenregeln:

- $Var(X + a) = Var(X)$, $Str(X + a) = Str(X)$
- $Var(aX) = a^2 Var(x)$, $Str(aX) = |a| Str(X)$
- $E(X - a)^2 = Var(X) + (EX - a)^2$, $E(X^2) = Var(X) + (EX)^2$
- $Str(X) = 0 \Leftrightarrow Var(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = EX) = 1$
- X, Y stoch. unabhängig $\Rightarrow Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Hinweis:

Varianzen diskreter und stetiger Verteilungen: Formelsammlung

Kovarianz

$$Kov(X, Y) := EXY - EXEY = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

Korrelationskoeffizient:

$$korr(X, Y) := \frac{Kov(X, Y)}{StrX StrY}$$

Rechenregeln Kov (X, Y reelwertig nicht unendlich):

- $Kov(X, X) = Var(X)$ und $Kov(X, Y) = Kov(Y, X)$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Kov(X, Y)$
- X, Y stoch. unabhängig: $Kov(X, Y) = 0$

Rechenregeln Korr (Var(X), Var(Y) != 0, X, Y nicht unendlich):

- $-1 \leq korr(X, Y) \leq 1$
- $korr(X, Y) = \pm 1 \Leftrightarrow Y = a + bX$
- Minimalwert: $Var(Y)[1 - (korr(X, Y))^2]$

Momente

Moment der Ordnung k: $m : k := E(X^k)$

k-tes absolutes Moment von X: $M_k := E(|X|^k)$

Berechnung: $m_k^X = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f^X(x) dx$

Momentenerzeugende Funktion:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = 1 + tm_1^X + \frac{t^2}{2!} m_2^X + \dots$$

Eigenschaften:

- $M_X(0) = 1$, $M_X'(0) = EX$, $M_X''(0) = E(X^2)$
- $M_{aX+b}(t) = M_X(at)e^{tb}$, $a > 0, b \in \mathbb{R}$
- $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ mit X, Y stoch. unabhängig
- $M_{X_n}(t) \rightarrow M_X(t) \Leftrightarrow X_n \rightarrow X$ für $n \rightarrow \infty$
- $Y \sim \mathcal{N}(0, 1) \Leftrightarrow M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

Zufällige Summen / bedingte Erwartungswerte

Zufällige Summe:

- Y ist ZV mit Werten in \mathbb{N}_0
- X_1, X_2, \dots seien reellwertige ZV

$$S = \sum_{i=1}^Y X_i$$

Eigenschaften (S = Zufällige Summe, EY, EX nicht unendlich):

- $ES = EY \cdot EX_1$
- $Var(S) = EY \cdot Var(X_1) + Var(Y) \cdot (EX_1)^2$

Bedingte Verteilung $P(X \in B | Y = y)$:

$$P^{X|Y}(B|y) = P(X \in B | Y = y) = \frac{P[(X \in B) \cap (Y = y)]}{P(Y = y)}$$

Gesetz der großen Zahlen

Konvergenz fast sicher:

→ Verteilungsfunktion integrieren, falls Wert, dann konvergiert meine Funktion bei unendlichen Versuchen gegen diesen Wert.

Beispiel Würfelwurf:

- Funktion: $Y_n = 1/n \cdot$ Summe der Würfelwürfe
- ⇒ $Y(w) =$ Erwartungswert = 3,5. D.h. Die Funktion konvergiert gegen 3.5 bei zunehmender Versuchsanzahl

Konvergenz stochastisch:

Hierbei betrachtet man Fehlertoleranzen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - Y| \geq \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$$

Y_n ist mein Grenzwert. Y ist der Wert meiner Versuche. Mein Epsilon gibt mir an, wie weit ich von meinem Grenzwert entfernt bin.

Chewbakka-Ungleichung:

Beispiel: ZV X: Artikellänge, $E[X] = 1000$, $Str(X) = 200$, $\epsilon = 400 \Rightarrow$ Wsk für Artikellänge zwischen 600 und 1400 liegt

bei: $P[|X - 1000| < 400] \geq 1 - \frac{200^2}{400^2} = 0,75$

Formel: $P(|Y - EY| \geq \epsilon) \leq (1/\epsilon^2) \cdot Var(Y)$

Zentraler Grenzwertsatz:

→ X_i stoch. unab. / $Str(X_i) < \infty$

$$\frac{S_n - E(S_n)}{Str(S_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i) - n \cdot E(X_1)}{\sqrt{n} Str(X_1)} \xrightarrow{V} Y$$

→ Folgen von ZV jeder Verteilung konvergieren eingesetzt in diese Formel gegen eine Standardnormalverteilung.

Markow-Ketten

Stochastischer Prozess:

Zufallsexperiment abhängig von der Zeit

Markow-Kette:

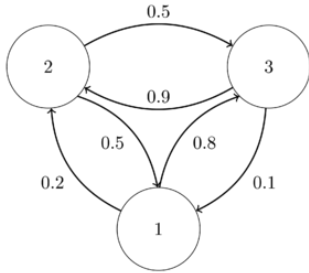
Stochastischer Prozess, Folge von Beobachtungen mit Markow-Koppelung mit bekannter Ereignismenge

Homogene Markowkette:

Übergangswahrscheinlichkeiten sind für alle Zeitpunkte gleich.
Ablesbar in der Matrix/Graph

Übergangsgraph:

Zustände als Knoten und Übergänge mit Wahrscheinlichkeiten als Kanten. Beispiel Wetter:



1 = Sonne scheint

2 = bewölkt

3 = Regen

Übergangsmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}$$

Pfad einer Markow-Kette:

Wahrscheinlichkeit, nach n Schritten von Knoten A nach Knoten B zu gelangen. Dafür wird die Übergangsmatrix n mal potenziert. Genannt n -Schritt-Übergangsmatrix

Startverteilung:

Vektor, wie wahrscheinlich es ist, an einem bestimmten Knoten zu starten. D.h. Vektor-Matrix-Multiplikation

Chapman-Molotov-Cocktail-Gleichung: $P^{n+m} = P^n \cdot P^m$

Irreduzibilität:

Jeder Zustand der Übergangsmatrix kann nach n -Schritten von jedem Punkt aus erreicht werden

Periodisch:

Wenn bei einer n -Schritt-Übergangsmatrix, nach n Schritten, der Ausgangszustand erreicht wird.

Gleichgewicht (stationär):

Ein Startvektor π mit Matrix M für die gilt: $\pi \cdot M = \pi$. π ist ein Zeilenvektor, bei dem die Summe der Einträge, die alle größer 0 sind, 1 ergibt. π findet man, indem man ein Gleichungssystem aufstellt und dieses löst.

Ist ein Übergangsgraph einfach zusammenhängend, so gilt $\pi_i \cdot p_{ij} = \pi_j \cdot p_{ji}$

→ Ist eine homogene Markow-Kette irreduzibel und aperiodisch, so existiert eine Gleichgewichtsverteilung mit $\pi > 0$ oder es gibt keine Gleichgewichtsverteilung und alle $\forall \pi_i = 0$

→ Eine Übergangsmatrix ist genau dann aperiodisch und irreduzibel, wenn eine Potenz m existiert, sodass die Übergangsmatrix P^m nur strikt positive Einträge enthält. Passiert das, so konvergiert P^m gegen die Gleichgewichtsverteilung Π

