IngMathe C3 Zusammenfassung

Extremstellen ohne Nebenbedingungen

Skalare Extremstellenfindung:
→ Max-Stelle: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \leq 0$
→ Min-Stelle: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \geq 0$
Global: Zeige, dass kein größerer Punkt

Definition Definitheit:
→ symmetrisch positiv definit: $< A\vec{v}, \vec{v} >> 0$
→ symmetrisch negativ definit: $< A\vec{v}, \vec{v} >< 0$
→ symmetrisch positiv semidefinit: $< A\vec{v}, \vec{v} >\geq 0$
→ symmetrisch negativ semidefinit: $< A\vec{v}, \vec{v} >\leq 0$
→ ansonsten Indefinit

Beispiel:
$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow v^T Av \rightarrow (v1, v2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix}$$
→ $(v1)^2 + (v2)^2$ → positiv definit

Erinnerung Hessematrix:
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$
Erinnerung Gradient:
→ Vektor der partiellen Ableitung nach jeder Variable

Extremstellen mit Hessematrix:
→ Max-Stelle: $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ und $Hf(\vec{x})$ ist neg. semidefinit
→ Min-Stelle: $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ und $Hf(\vec{x})$ ist pos. semidefinit

Eigenwerte berechnen:
→ Diagonaleinträge minus λ
→ 2-Dimensional: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
→ 3-Dimensional: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$
$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
→ Charakteristisches Polynom lösen

Eigenwerkriterium für Definitheit:
→ positiv definit: $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$
→ negativ definit: $\lambda_1, ..., \lambda_n < 0$
→ positiv semidefinit: $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$
→ negativ semidefinit: $\lambda_1, ..., \lambda_n \leq 0$
→ indefinit, wenn zwei λ unterschiedliche Vorzeichen

Extremstellen mit Nebenbedingungen

Lagrange Formalismus (1. Nebenbedingung):
→ Nebenbedingung umstellen, sodass gleich 0
→ Lagrange Bedingung aufstellen: $f(x) - \lambda g(x) = C$
→ Lagrange Bedingung pro Variable partiell ableiten
→ Gleichungssystem aus Ableitungen lösen
→ Tipp: Matrizenform und Gauß anwenden

Beispiel:
→ $f(x, y) = 5xy - y^2$ und $NB : x + y = 12 \rightarrow x + y - 12 = 0$
→ $L(x, y, \lambda) = 5xy - y^2 - \lambda(x + y - 12)$
→ $L'(x, y, \lambda) = 5y + \lambda = 0$
→ $L'(x, y, \lambda) = 5x - 2y + \lambda = 0$
→ $L'(x, y, \lambda) = x + y - 12 = 0$

Lagrange Formalismus (mehrere Nebenbedingungen):
→ Alle NB umstellen, sodass gleich 0
→ Lagrange Bedingung: $L = f(x) - \lambda_1 g(x) - ... - \lambda_n g(x)$
→ Lagrange Bedingung pro Variable partiell ableiten
→ Gleichungssystem aus Ableitungen lösen

Implizite Funktionen

→ explizite Funktionen: f(x) = y
→ implizite Funktionen: $x^2 + y^2 = 1$
→ Umrechnung von explizit zu implizit nicht trivial

Satz über implizite Funktionen:
Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(x', y') \in D$ und $f(x', y') = 0$
Zudem gilt: $\partial_2 f(x', y') \neq 0$
⇒ Existenz der Auflösungsfunktion: $f(x, y(x) = 0) \wedge y' = y(x')$
Die Auflösungsfunktion ist stetig differenzierbar und es gilt:
$y'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, y(x))}{\partial_2 f(x, y(x))}$

Satz über implizite Fkt (mehrdimensional):
→ $f : D \in \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit$n, m \in \mathbb{N}$ und $(x', y') \in D$ und $x' \in \mathbb{R}^n \wedge y' \in \mathbb{R}^m$
→ $\vec{f}(\vec{x'}, \vec{y'}) = \vec{0}$
→ Die $m \times m$-Matrix $\partial\vec{f}/\partial\vec{y}(\vec{x'}, \vec{y'})$ muss invertierbar sein
→ $\vec{f}(\vec{x'}, \vec{y'}(\vec{x})) = \vec{0}$ und $\vec{y}(\vec{x'}) = \vec{y}$
⇒ Es existiert eine Auflösungsfunktion

Jacobi Matrix:
→ Alle Partiellen Ableitungen einer Funktion nebeneinander

Satz der inversen Abbildung:
Vorraussetzung: $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei offen, $\vec{x'} \in D$, $f \in C^1(D)$, Jacobimatrix $J\vec{f}(\vec{x'}) = d\vec{f}/d\vec{x}(\vec{x'})$ ist invertierbar
⇒ Umkehrfunktion existiert

Bemerkung:
→ Die Existenz einer Umkehrfunktion in jedem Punkt impliziert nicht die Existenz einer globalen Umkehrfunktion

---

Kurvenberechnung

Parameterdarstellung:
→ Darstellung durch einen Vektor mit Parametern
→ Zum ableiten jede Zeile einzeln ableiten
Beispiel:
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix} \rightarrow \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}$$

Erinnerung:
→ "$||y(t)||$": Betrag der euklidischen Norm
→ "$< \vec{x}, \vec{y} >$": Skalarprodukt: $x_1y_1 + ... + x_ny_n$
→ "$\vec{x} \times \vec{y}$": Kreuzprodukt: $(23 - 32, 31 - 13, 12 - 21)^T$
→ Kreuzprodukt 2 dimensional: skalarer Wert (Determinante)

Bogenlänge Kurve: $\int_a^b ||\vec{y}'(t)||dt$

1. Kurvenintegral: $\int_a^b f(\vec{y}(t))||\vec{y}'(t)||dt$

2. Kurvenintegral: $\int_a^b < \vec{F}(\vec{y}(t)), \vec{y}'(t) > dt$

1. Oberflächenint.: $\int_a^b f(\vec{y}(s, t))||\partial_1\vec{y}(s, t) \times \partial_2\vec{y}(s, t)||dsdt$

2. Oberflächenint.: $\int_a^b < \vec{f}(\vec{y}(s, t)), \partial_1\vec{y}(s, t) \times \partial_2\vec{y}(s, t) > dsdt$

Tangente Berechnen: $T(s) = y'(t) \cdot s + y(t)$ mit $s \in \mathbb{R}$

Bemerkung:
→ 1.Art wird bei skalaren Funktionen verwendet
→ 2.Art wird bei vektorialen Funktionen verwendet

Definitionen:
→ Para-Darstellung glatt/regulär: keine erste Ableitung ist 0
→ Bogenlängenparametrisiert: Kurvenintegrall ist 1

Optimierung

konvexe Mengen:
→ Verbindungsstrecke zweier Punkte immer in der Menge
→ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in M \forall a \in (0,1) : a\vec{x} + (1-a)\vec{y} \in M$

konvexe Funktion:
→ Funktionswerte unterhalb der Verbindungsstrecke
→ Bei konkarv oberhalb der Verbindungsstrecke
→ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in D \forall a \in (0,1) : f(a\vec{x} + (1-a)\vec{y}) \leq af(\vec{x}) + (1-a)f(\vec{y})$
→ strikt konvex wenn $<$

Ableitungskriterium für Konvexität:
→ f konvex $\leftrightarrow Hf(\vec{x})$ positiv semidefinit
→ f strikt konvex $\leftarrow Hf(\vec{x})$ positiv definit

Eigenschaften:
→ Jede lokale Minstelle ist auch globale Minstelle
→ alle lokalen Minstellen bilden eine zusammenhängende, konvexe Minstelle
→ alle lokalen Minima haben den gleichen Wert
→ Die Menge aller lokalen minima kann leer sein
→ Wenn f strikt konvex ist, gibt es max. eine Minstelle
→ Eine nichtleere kompakte Levelmenge hat mind. eine globale Minstelle

Quadratische Optimierung:
→ ! Nur mit quadratischen Matrizen! Problemstellung:
→ $\min 1/2 \cdot < A\vec{x}, \vec{x} > + < \vec{b}, \vec{x} > (+c) \rightarrow$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$
→ $\partial f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ und $Hf(\vec{x}) = A$
$\Rightarrow \vec{x'} = -A^{-1} \cdot \vec{b} \Rightarrow A\vec{x'} = -b \Rightarrow$ Gaußverfahren

Linear-Quadratisches Minimierungsproblem:
→ Funktion: $f(\vec{x}) = 1/2 < A\vec{x}, \vec{x} > + < \vec{b}, \vec{x} >$
→ Nebenbedingung: $B\vec{x} = \vec{c}$ mit $B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \vec{c} \in \mathbb{R}^m$
Fall 1: Vektor Nebenbedingung:
$B_i \cdot c = c_i$ mit $i = 1, ..., m \Rightarrow$ m Nebenbedingungen.
$\Rightarrow$ Lagrange Multiplikator und Lagrangestyle lösen
Fall 2: Skalare Nebenbedingung:
Ausgangsformel in skalare Form bringen durch ausmultiplizieren, Nebenbedingung unverändert lassen $\Rightarrow$ Lagrange Lösen

Simplex Algorithmus
→ Simplex ist ein von Geraden aufgestellter Körper
→ Idee: Laufe Geraden entlang bis Ergebnis
→ 1. Mathematische Formulierung mit Variablen (HaVa)
  → Nebenbedingung z(Variablen)= ... $->$ max
  → Variablen ≥ 0
→ 2. Pro Gleichung eine Variable (HiVa) einführen
  → NB Vorzeichenwechsel und $->$ Min (wenn positiv)
  → Alle Variable ≥ 0
→ 3. Tabelle aufstelle:

	HaVa	HiVa	Wert	Quotient
HiVa 1	HaVa 1ter Wert	HiVa = HiVa:1	Wert	Quotient
Hiva n	HaVa nter Wert	Hiva $\neq$ HiVa:0	Wert	Quotient
NB	NB HaVa Wert	0	0	0

→ 4. IF links bei NB keine negativen Werte: Fertig
→ 5. IF links bei NB nur negative Werte: LP unbeschränkt
→ 6. ELSE Basiswechsel:
  → Wähle Spalte mit kleinstem Quotienten/Nebenbedingung
  → Gaußmäßig Zeile auf andere Zeilen addieren, sodass:
  → 1 in der ausgewählten Zeile, sonst 0

Bemerkung: → Basis sind 0er und 1er Zeilen
→ Nicht Basis alle anderen Zeilen
→ Quotient = Wert / (Spalte kleinster NB)

Fixpunktiterationen

Fixpunkt:
→ Abbildung f: A → B mit $A \subseteq B$
→ Fixpunkt: f(x) = x Bsp: Nullpunkt einer Ursprungsgeraden
→ Fixpunktiteration mit rekursiven Funktionen g(x) möglich
→ Falls g(x) konvergiert und stetig: Grenzwert: Fixpunkt

Banach Raum und Vollständigkeit:
→ Vollständig: Normierter Vektorraum, indem jede Cauchy-Folge konvergiert
→ vollständiger normierter Vektorraum $\Leftrightarrow$ Banach-Raum
→ Hilbert-Raum: Banach-Raum + $\forall x \in V : ||x|| = \sqrt{< x, x >}$
→ $\mathbb{R}^n$ mit jeder beliebigen Norm ist ein Banach-Raum

Kontraktion:
→ Sei V ein Vektorraum: $M \subseteq V$ und $\phi : M \rightarrow V$
→ ϕ heißt Kontraktion, falls es ein $k < 1$ gibt, sodass: $||\phi(x) - \phi(y)|| \leq k||x - y|| \forall x, y \in M$
→ grob: Bilder liegen näher beieinander als Urbilder
→ Das k heißt dann Kontraktionskonstante von ϕ

Fixpunktsatz von Banach:
→ Banach-Raum V $\wedge\ 0 \neq M \subseteq V =$ abgeschlossene Teilmenge
→ Sei $\phi : M \rightarrow V$ mit $\phi(M) \subseteq M$ eine Kontraktion
$\Rightarrow \phi$ genau ein Fixpunkt und Grenzwert: $x_{n+1} := \phi(x_n)$
→ Fehlerabschätzung: k = Kontraktionskonstante von ϕ Aproximationsfehler fällt pro Interationsschritt um min. k $||x_{n+1} - x'|| \leq k||x_n - x'||$ somit $||x_n - x'|| \leq k^n||x_0 - x'||$

Newton-Verfahren:
→ $xn + 1 = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
→ Stellt Fixpunktiteration zu folgender Funktion dar:
→ $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
→ Die Asymptotische Kontraktionskonstante von $\phi(x)$ ist 0

Definitionen:
→ linear konvergent: $k < 1 : ||x_n - x'|| \leq k||x_{n-1} - x'||$
→ quadratisch konvergent: $c > 0 : ||x_n - x'|| \leq c||x_{n-1} - x'||^2$

Newton-Verfahren im mehrdimensionalen:
→ Sei $\vec{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar
→ Sei die Jacobi-Matix $Jf(\vec{x})$ invertierbar für alle $\vec{x}$
→ $\vec{x}_{n+1} := \vec{x}_n - [(Jf)(\vec{x}_n)]^{-1}\vec{f}(\vec{x}_n)$

Differentialgleichungen

Eigenschaften von Differentialgleichungen:
→ linear: Ausgangsfunktion ohne Potenzen / e-Funktion
→ nte Ordnung: höchste Ableitung
→ skalar: ohne Vektoren
→ gewöhnlich: nur Ableitungen nach einer Variable
→ autonom: Variable tritt nicht allein auf
→ explizit: Umgestellt nach höchster Ableitung
→ homogen: ohne Störfunktion
→ System von DGL: Matrixschreibweise

Anfangswertproblem (AWP):
→ Für DGL ohne Anfangswert nur allgemeine Lösung
→ Mit Anfangswert lässt sich die Konstante berechnen
→ Für explizite gewöhnliche DGL 1. Ordnung
→ Gegeben: $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$ mit $y(a) = b$

$$y_0 = c \cdot e^{kt_0} \Rightarrow c = y_0 e^{-kt_0} \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-kt_0} e^k t = y_0 e^{k(t-t_0)}$$

→ AWP n-ter Ordnung umwandelbar in AWP erster Ordnung:
→ Es werden n Anfangswerte benötigt
→ Gegeben: $y^n(t) = f(t, y(t), ..., y^{n-1}(t))$
→ 1. n Hilfsvariablen Einführen: $z_1, ..., z_n$
→ 2. Hilfvariablen zuweisen: $z_1(t) = y(t), ..., z_n(t) = y^{n-1}(t)$
→ 3. System von DGL erster Ordnung aufstellen:
⇒ $z_1'(t) = z_2(t), z_2'(t) = z_3(t), ..., z_n'(t) = f(t, z_1(t), ..., z_{n-1}(t))$
→ 4. System in Matrixschreibweise umwandeln
→ Beispiel: $y'' = 3y' - 2y \Rightarrow z_1 = y, z_2 = y'$
⇒ $z_1' = z_2$, $z_2' = -2z_1 + 3z_2$
⇒ $y_{neu} = (0\ 1, -2\ 3)^T \cdot (z_1, z_2)^T$

Lösung für skalare DGLs erster Ordnung:
→ Gegeben: $f(t, y) = g(y)h(t) \Rightarrow$ Trennung der Variablen
→ Funktioniert nicht für Systeme n-ter Ordnung
→ 1. Seperation: $y'(t)/g(y) = h(t)$

$$\int_b^x \frac{1}{g(y)} dy = \int_a^x f(x)dx + c \Rightarrow G(y) = H(t) + c$$

→ Gleichung nach $y(t)$ umstellen

Lösen mittels Substitution:
→ Wenn keine bekannten Lösungsverfahren funktionieren
→ Substitution, damit andere Lösungsverfahren möglich sind
→ 1. Geeignete Substitution finden, z.B.:
⇒ $y'(t) = f(y(t)/t) \Rightarrow$ Substitution: $z(t) = y(t)/t$
⇒ $y'(t) = f(at + by(t) + c) \Rightarrow$ Substitution: $z(t) = at + by(t) + c$
→ Substitution nach $y(t)$ umformen und nach t ableiten
→ Substitution und Ableitung ins ursprüngliche DGL einsetzen
→ Weitere Lösungsverfahren anwenden
→ Beispiel: $y'(t) = (y(t)/t) \cdot (log(y(t)/t) + 1)$
⇒ $z(t) = y(t)/t \Rightarrow y(t) = tz(t), y'(t) = tz'(t) + z(t)$
⇒ $tz'(t) + z(t) = z(t)log(z(t)) + z(t) \Leftrightarrow tz'(t) = z(t)log(z(t))$
⇒ Jetzt noch Trennung der Variablen anwenden

Variation der Konstanten:
→ 1. DGL in Ausgangslage bringen: $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$
→ 2. homogene Lösung: $x_n(t) = c \cdot e^{-A(x)}$ mit $c \in \mathbb{R}$
→ Lösen des inhomogenen Anteils:
→ 3. C als Funktion: $x_n(t) = c(t) \cdot e^{-A(x)}$
→ 4. Einsetzen $x_n(t)$ in $x(t)$ und nach $c(t)$ bzw. $c'(t)$ auflösen
→ 5. Integrieren von c(t) bzw. c'(t)
→ 6. Einsetzen von c(t) in $x_n(t)$
→ 7. Anfangswert für Hilfsvariable aus 5. einsetzen
→ 8. Formel aus 7. in DLG einsetzen

Existenztheorie:
→ DGLs n-ter Ordnung umwandelbar in DGLs erster Ordnung
⇒ Rechte Seite stetig ⇒ es existiert eine Lösung des AWP

Lineare DGL-Systeme erster Ordnung:
→ Diesmal mit quadratischer Matrix A(t)
→ Gegeben: $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$
→ homogen, wenn $b(t) = 0$, ansonsten inhomogen
⇒ Lösungsmenge: $L_{inhom} = \{y_p\} + L_{hom}$ mit: y_p= feste Größe
→ Dimension der Lösung ist Dimension der Matrix
→ Fundamentalsystem: Basis von L_{hom}
→ Fundamentallösung: Mitglieder des Fundamentalsystems
→ Fundamentalmatrix: $w(t) := [\vec{y}_1(t), ..., \vec{y}_n(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$
→ Wronski Determinante: $det(w(t))$

Berechnung Fundamentalsystems (A unabhängig von t):
→ Gegeben: $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$
→ Fall 1: A ist eine Diagonalmatrix:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} y(t) \Rightarrow y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, ..., y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$$

⇒ $L_{hom} = \{\vec{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, ..., c_n e^{\lambda_n t}\}, c_i \in \mathbb{R}^n$
⇒ Fundamentalsystem: $e^{\lambda_1 t}\vec{e_1}, ..., e^{\lambda_n t}\vec{e_n}$
→ Fall 2: A ist diagonalisierbare Matrix:
⇒ 1. Berechne die EW λ_i von A
⇒ 2. Berechne die EV V_i von A
⇒ Fundamentalsystem: $e^{\lambda_1 t}v_1, ..., e^{\lambda_n t}V_n$
⇒ Sonderfall: komplexe Eigenwerte:
⇒ Umwandeln in reelles Fundamentalsystem:
⇒ komplexe Eigenwerte treten doppelt auf
⇒ Zerlegen von λ_i und V_i in Real und Imaginärteil
⇒ $\lambda = a + bi$ und $V = r + si$
⇒ $y_1(t) = (r \cdot cos(bt) - s \cdot sin(bt))e^{at} + i(s \cdot cos(bt) + r \cdot sin(bt))e^{at}$
⇒ $y_2(t) = (r \cdot cos(bt) - s \cdot sin(bt))e^{at} - i(s \cdot cos(bt) + r \cdot sin(bt))e^{at}$
⇒ $y_{1,reell} = RE(y_1)$ und $y_{2,reell} = IM(y_1)$
⇒ Einträge des reellen Fundamentalsystems
→ Fall 3: A ist nicht diagonalisierbar:
→ Es existiert mind. ein EW wo $alg \neq geo$
→ Sei λ der EW ⇒ Berechnung Hauptvektoren (HV)
⇒ 1. Einen EV V_n zu λ berechnen
⇒ 2. Berechnung Hauptvektor: $(A - \lambda \cdot \text{Einheitsmatrix})V_2 = V_1$
⇒ Man benötigt soviele Hauptvektoren wie alg von λ
→ Fundamentalsystem für EW mit $alg \neq geo$ und V_m HV:

$$e^{\lambda t}(V_m + t_{V_{m-1}} + (t^2/2!)_{V_{m-2}} + ... + (t^{m-1}/(m-1)!)_{V_1}$$

→ Berechnung partikulärer Lösung für inhomogene DGL:
→ Sei $\vec{y_1}, ..., \vec{y_n}$ ein Fundamentalsystem:
⇒ Partikuläre Lösung: $\vec{y_p} = W(t)\vec{c}(t)$
⇒ $\vec{y_i}$ Lösungen $\Rightarrow c'(t) = W(t)^{-1}b(t)$
⇒ Integrations der einzelnen Komponenten ohne Konstante
⇒ Einsetzen: $L_{inhom} = \vec{y_p} + L_{hom}$

Lineare skalare DGLn n-ter Ordnung:
→ Gegeben: $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_0(t)y(t) = b(t)$
→ Umwandelbar in System von DGL erster Ordnung
→ Nur für Konstante a_i lösbar
→ Ist a_i abhängig von t ⇒ kein Fundamentalsystem
→ Trick zum Bilden des charakteristischen Polynoms:
⇒ $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0)$
→ Lösungsraum homogener DGL:
→ a_i ist eine Konstante, $b = 0$
→ Für jede Nullstelle $\lambda_i \in \mathbb{C}$ nehme die Funktion:
⇒ $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, ..., t^{r_j - 1}e^{\lambda_i}$
→ r_j ist die Vielfachheit der NS λ_i
→ Für die partikuläre Lösung: $\vec{y_p} = w(t)\vec{c}(t)$

Numerische Verfahren:
→ Wenn man das Anfangswertproblem nicht exakt lösen kann
→ genannt: Eulersches Polygonzugverfahren
→ $y_{n+1} = y_n + hf(t_n), y_n)$ mit $h > 0 \in \mathbb{R}$
→ $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h/2, y_n + h/2 \cdot f(t_n, y_n))$

Algebra

Definition Gruppe:
→ Menge M mit einer Verknüpfung
→ Halbgruppe: $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Assoziativgesetz)
→ Monoid: $a * e = e * a = a$ (neutrales Element)
→ Gruppe: $a * b = b * a = e$ (inverses Element)
→ Abel'sche Gruppe: $a * b = b * a$ (Kommutativgesetz)

Definition Ring:
→ Menge M mit zwei Verknüpfungen: +,*
→ (M,+) ist eine Abelsche Gruppe
→ (M,*) ist assoziativ
→ Distributivgesetz gilt:$(a + b) * c = a * c + b * c$
→ Ring mit Einselement: enthält neutrales Element
→ kommutativer Ring: (M,*) ist kommutativ

Definition Körper:
→ kommutativer Ring (M,+,*) mit Einselement
→ Jedes Element außer 0 hat Inverses bzgl. Multiplikation
→ Oder: Ring(M,+,*) mit $(M\backslash\{0\}, *)$ als Abelsche Gruppe

Definition Restklasse:
→ Menge der Zahlen, die bei a mod b denselben Rest haben
→ Bsp: $[2]_3 = \{... - 4, -1, 2, 5, ...\} = \{z \in \mathbb{Z} | z \equiv 2(mod 3)\}$
→ Verknüpfungen: $[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$ und $[a]_n \cdot [b]_n = [a \cdot b]$
→ Mit Restklassen kann man Ringe und Körper bauen

Satz:
→ Im Restklassenring $(\mathbb{Z}_n, +, *)$ gilt für jedes $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$:
→ $[a]_n$ invertierbar bzgl. Multiplikation ist äquivalent zu:
⇔ $\forall [b]_n \in \mathbb{Z}_n \backslash \{0\} : [a]_n * [b]_n \neq [0]_n$

Satz 1 (euklidischer Divisionsalgorithmus):
→ $\forall a, b \in \mathbb{N} : \alpha, \beta \in \mathbb{Z} : ggT(a, b) = \alpha a + \beta b$

Satz 2 (teilerfremdheit):
→ $a, b \in \mathbb{N}$ sind genau dann teilerfremd, wenn mit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ gilt:
⇒ $\alpha a + \beta b = 1$

Satz 3 (Folgerung aus Satz 2):
→ $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ hat Inverses bzgl. *, wenn a und n teilerfremd

Satz:
→ $\forall n \geq 2 : (\mathbb{Z}_n \backslash \{0\}, *)$ ist Gruppe ⇔ n ist prim

Satz (endliche Körper):
→ $\forall p \geq 2 : (\mathbb{Z}_p, +, *)$ ist Körper ⇔ p ist prim

Beispielrechnung mit Restklassen:
→ Mit welcher Ziffer endet z = 9^{123}
→ $[9^{123}]_{10} = [9]_{10}^{123} = [-1]_{10}^{123} = [(-1)^{123}]_{10} = [-1]_{10} = [9]_{10}$

Fehlererkennung:
→ Einzelfehler:
⇒ $\forall i = 1, ..., m : [g_i]_n$ ist invertierbar
⇒ Also: $ggT(g_i, n) = 1 \forall i = 1, ..., m$
→ Vertauschfehler:
⇒ $\forall i, j = 1, ..., m + 1$ mit $i \neq j$: $[g_i - g_j]$ ist invertierbar
⇒ Also: $ggT(|g_i - g_j|, n) = 1 \forall i \neq j$
→ Nachbartauschungsfehler:
⇒ $\forall i = 1, ..., m : [g_i - g_{i+1}]_n$ ist invertierbar
⇒ Also: $ggT(|g_i - g_{i+1}|, n) = 1 \forall i = 1, ..., m$

Tipps:
→ Berechnung der Inversen einer Gruppe$(\mathbb{Z}_n^*)$:
⇒ Große n: euklidischer Divisionsalgorithmus
⇒ Kleine n: Bilde Potenz von $[a]_n$ bis $[a]_n^k = [1]_n$
Es ist dann $[a]_n^{k-1} \cdot [a]_n = [1]_n \Rightarrow [a]_n^{-1} = [a]_n^{k-1}$

Definition (Nullteilerfreiheit):
→ Definiert für einen Ring (R,+,*)
→ $\forall a, b \in R : (a * b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0)$
→ Elemente $a, b \in R$ mit $a * b = 0$ nennt man Nullteiler
→ Körper sind immer nullfrei

Satz (Primzahlen):
→ Jede Zahl ist eine Multiplikation von Primzahlen
→ Es gibt unendlich viele Primzahlen

Definition (Euler'Sche Phi-Funktion):
→ $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \Rightarrow \phi(n) := |\mathbb{Z}_n^*| = \{k \in \{1, ..., n\} | ggT(k, n) = 1\}|$
→ Für Primzahlen gilt $\phi(p) = p - 1$
→ Für Primzahlpotenzen gilt $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1)$
→ Für teilerfremde Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$

Definition (Untergruppe):
→ Sei (G , *) eine Gruppe und $\emptyset \neq U \subseteq G$
⇒ $\forall a, b \in U : a * b \in U$
⇒ $\forall a \in U : a^{-1} \in U$

Definition (Homomorphismus / Isomorphismus):
→ Seien $(G, *)$,$(H, \circ)$ Gruppen
→ Abbildung $f : G \rightarrow H$ heißt Homomorphismus, falls:
⇒ $f(a * b) = f(a) \circ f(b) \forall a, b \in G$
⇒ Isomorphismus, wenn f zusätzlich bijektiv

Satz (Homomorphismus Eigenschaften):
→ Für $f : (G, *) \rightarrow (H, \circ)$ gilt:
⇒ $f(1_G) = 1_H$
⇒ $f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \forall a \in G$
⇒ Ist f Isomorph, dann auch f^{-1}
⇒ Bild(f) ist eine Untergruppe von H
⇒ Kern(f) := $\{a \in G | f(a) = 1_H\}$ ist eine Untergruppe von G
⇒ f injektiv ⇔ Kern(f) = $\{1_G\}$

Satz:
→ Sei G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G
⇒ Die Elementezahl von U ist Teiler der Elementezahl von G

Definition (Quotientengruppe):
→ Sei $(G, *)$ eine Abelsche Gruppe und $U \subseteq G$
→ Dann ist auf $G \backslash U$ die Verknüpfung wohldefiniert:
⇒ $[a]_U \circ [b]_U := [a * b]_U \forall a, b \in G$

Satz (Struktursatz endlicher abelscher Gruppen):
→ Endliche abelsche Gruppen G sind isomorph zu Gruppen
der Form:$\mathbb{Z}_{n1} \times ... \times \mathbb{Z}_{nk}, k \geq 1$
→ wobei $n1 \geq 2$ und ni Teiler von $ni + 1$ ist
→ Es ist weiterhin $|G| = n1 \cdot n2 \cdot ... \cdot nk$

Satz (Homomorphiesatz):
→ Gruppen G und H. $f : G \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismus
⇒ Gruppen $G \backslash Kern(f)$ und $Bild(f)$ sind isomorph
⇒ $f : G \backslash Kern(f) \rightarrow Bild(f)$
⇒ $[a]_{Kern(f)} \rightarrowtail f([a]_{Kern(f)}) := f(a)$

Satz:
→ m,n teilerfremd. $(\mathbb{Z}_{nm}, +)$ und $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$ isomorph
⇒ $f : \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_\times \mathbb{Z}_n$, $[a]_{mn} \rightarrowtail [a]_m \times [a]_n$ sind Isomorphismen
→ m,n teilbar. $(\mathbb{Z}_{nm}, +)$ und $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$ nicht isomorph
→ Einschränkung von obrigen f auf $\mathbb{Z}_{nm}^*$, $f : \mathbb{Z}_{mn}^* \rightarrow \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*$
⇒ falls m, n teilerfremd, f ist wohldefiniert und bijektiv

Satz (kleiner Fermat'scher Satz):
→ Für Primzahl p und $x \in \mathbb{Z}$: $x^p \equiv x(mod\ p)$
→ $x \in \mathbb{Z}$ nicht teilbar mit Primzahl p: $x^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$
→ $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}$ mit ggT(x,n) = 1: $x^{\phi(n)} \equiv 1(mod\ n)$