IngMathe C4 kleine Zusammenfassung Autor: Julian Kotzur

Einführung

→ Ereignis:
⇒ Eine Situation, von der man nicht sicher vorhersagen kann, ob sie eintreten wird oder nicht.
→ Wahrscheinlichkeit:
⇒ Eine zahlenmäßige Bewertung der Chance, dass das Ereignis eintreten wird. → Zufallsexperiment:
⇒ Experiment, dass man beliebig oft durchführen kann, wobei jedes mal der Ausgang nicht vorhersagbar ist
→ Häufigkeit:
⇒ Wir oft ein Ergebnis eintritt
⇒ relative Häufigkeit: Eintreten eines Ergebnisses durch die Anzahl der Durchführungen

Gesetz der Großen Zahlen

→ Führt man ein Zufallsexperiment N-mal durch, wobei N groß ist, so stabilisiert sich die relative Häufigkeit immer bei einer für das Ergebnis E charakteristischen Zahl P(E)

Beschreibende Statistik

→ Datensatz:
⇒ Aus einer Messung/Beobachtung entstandenen Daten
→ Stichprobe:
⇒ Datensatz entstand aus gezielter Teilerhebung

→ Nominale Daten:
⇒ qualitative Ausprägung ohne natürliche Ordnung
→ Ordnial:
⇒ qualitative Ausprägung mit natürlicher Ordnung
→ Metrisch/rational:
⇒ Ausprägung, durch die eine Zahl beschrieben werden kann

→ Statistik:
⇒ Kompromierung und oder graphische Darstellung eines Datensatzes
→ Ordnungsstatistik:
⇒ geordneter Datensatz mir Indizes
⇒ Erster Rang ist Minimum, letzter ist Maximum

→ Rangberechnung:
⇒ einzelner Wert: $R(x_i) = i$
⇒ mehrfacher Wert: Minimum: x_r Maximum: x_{r+s-1}
⇒ $R(x_i) = r + (s-1)/2$

→ kumulierte Häufigkeit:
⇒ Summe der Häufigkeiten einer Ausprägung

→ Histogramm:
⇒ Die Werte der Stichproben werden zu Klassen zusammengefasst, die ein Intervall $[a, b)$ haben
⇒ Spannweite ist die größe des Intervalls
⇒ Im Histogramm wird die Summe der Datensätze des Intervalls eingezeichnet
⇒ x- Achse = Häufigkeit
⇒ y- Achse = Klassennummer

Mittelwertberechnung (arithmetisches Mittel):

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Medianberechnung:

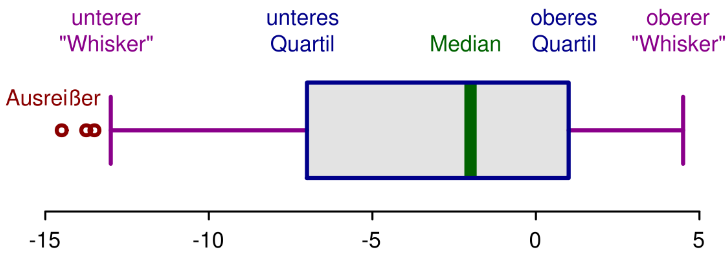
$$f(x) = \begin{cases} x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} & , n = \ gerade \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}+1\right]}\right) & , n = \ ungerade \end{cases}$$

Quartilenberechnung:

$$f(x) = \begin{cases} x_{\left[n \cdot \frac{p}{100}\right]} & , n \cdot \frac{p}{100} = \ rational \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left[n \cdot \frac{p}{100}\right]} + x_{\left[n \cdot \frac{p}{100}+1\right]}\right) & , n \cdot \frac{p}{100} = \ ganzzahlig \end{cases}$$

⇒ 25% Quartil == unteres Quartil
⇒ 75% Quartil == oberes Quartil
⇒ Interquartilabstand: oberes minus unteres Quartil

Boxplot:



Streuung / Standartabweichung:

$$\sigma_x^n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)}$$

empirische Kovarianz:

⇒ Gegeben: $x = (x_1, ..., x_n)$ und $y = (y_1, ..., y_n)$
⇒ empirischer Korrelationskoeffizient: $r_{xy} := s_{xy}/s_x s_y$

$$s_{xy} := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y}\right)$$

Zufallsexperimente

→ Bernoulli-Experiment:
⇒ Zwei mögliche Ausgänge
⇒ Ausgänge gleich wahrscheinlich

→ Laplace-Experiment:
⇒ endlich viele Ausgänge
⇒ Ausgänge sind gleichwertig

Wahrscheintlichkeitsmodelle

Die Bausteine

→ Ergebnismenge
→ Ereignis-System $\mathbb{A}$
→ Wahrscheinlichkeit P

Ergebnismenge Ω

→ nicht leere Menge
→ Gibt die möglichen Ergebnisse an

Zusammengesetzte Ereignisse

→ Häufig werden Beobachtungen kombiniert
→ kartetisches Produkt der Ereignisse:
⇒ Mengen $\Omega_1, ..., \Omega_2$
⇒ kartetisches Produkt: $\Omega_1 \times ... \times \Omega_2$
⇒ Zusammenfassung von Ereignissmengen
⇒ Z.b. mehrfaches Werfen eines Würfels

Ereignisse

→ Ereignis A ist Teilmenge von Ω
→ Die Menge aller Ereignisse heißt Ereignissystem $\mathcal{A}$
→ A = $\emptyset$ = unmögliches Ereignis
→ A = Ω = Ereignis tritt immer ein
→ Gesamtheit aller Teilmengen = Potenzmenge von Ω: $\mathcal{P}(\Omega)$
→ Mächtigkeit des Ereignisraum: $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$

Ereignissystem $\mathcal{A}$

→ Abgeschlossenes Mengensystem $\mathcal{A}$ über Ω benötigt:
⇒ $\Omega \in \mathcal{A}$
⇒ $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
⇒ $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
→ Ω ist endlich / abzählbar
⇒ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
→ Ω ist unendlich:
⇒ $\mathcal{A} = \mathbb{R}$
→ Wichtig: Wenn Ereignis Ausgeschlossen: Potenzmenge ohne Ereignis

Ereignisdarstellung durch Zufallsvarialben

→ Abbildung von einer Ergebnismenge Ω mit Ereignssystem $\mathcal{A}$ in eine Bildmenge Ω' mit Ereignissystem $\mathcal{A}'$
→ Zufallfsvariablen werden meist mit X,Y,Z,U,V,W bezeichnet
→ Ereignisse werden meist mit A , B , C bezeichnet
→ Zufallsvariablen werden verwendet um enthaltene Informationen zu komprimieren / auszuwählen

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

→ Wahrscheinlichkeit von A: P(A)
→ Berechnung: 1 / Anzahl der Ereignisse
→ Eigenschaften:
⇒ $0 \leq P(A) \leq 1$
⇒ P(Ω) = 1 und $P(\emptyset) = 0$
⇒ $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$
→ Rechenregeln:
⇒ $P(A^c) = 1 - P(A)$
⇒ $P(A \backslash B) = P(A) - P(AB)$
⇒ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
⇒ $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
⇒ $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten

Für stochastisch Abhängige Ereignisse gilt:
→ $P(A|B) = (P(A \cap B) \backslash P(B))$
→ $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$
→ $P(A \cap B \cap C) = P(A \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

Formel von Bayes:
→ Gilt für Abhängige Ereignisse und abzählbare Zerlegungen von Ω

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i \in I} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Stochastische Unabhängigkeit:
→ $P(A|B) = P(A)$
→ $P(AB) = P(A)P(B)$
→ $P(AB) = P(A)P(B)$

Beispiel

Würfelwurf:
→ A definiert Wahrscheinlichkeit einer 1
→ Ereignismenge: $\Omega = \{1, ..., 6\}$
→ Ereignissystem: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
→ Wahrscheinlichkeit: $P(A) = 1/6$ bzw. $P(A) = A/|\Omega|$

Wahrscheinlichkeitsmaße

Diekrete W-Maße und Zähldichte

Zähldichte Eigenschaften:
→ Gegeben: P ist W-Maß über $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f(\omega) = P(\{\omega\})$:
⇒ $f(\omega) \geq 0 (\omega \in \Omega)$
⇒ $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$
⇒ Jedes Ereignis ist wahrscheinlich und die Summe der Ereignisse ist 1
⇒ W-Maß = Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten
⇒ Z-Dichte = Arbeiten mit Funktion für Wahrscheinlichkeiten

Binomial Z-Dichte:
→ Gegeben: $p, q \geq 0$ und $p + q = 1$ und $\Omega = \{0, 1, ..., n\}$

$$f(k) = b(n, p; k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Geometrische Z-Dichte:
→ Gegeben: $0 < q < 1$ und $\Omega = \{0, 1, ...\}$

$$f(k) = (1 - q)q^k$$

Poisson Z-Dichte:
→ Gegeben: $\lambda \in (0, \infty)$ und $\Omega = \{0, 1, ...\}$

$$f(k) = \pi(\lambda; k) = e^{-k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Hinweise:
→ Zähldichte der Häufigkeitsverteilung: Vorkommen eines Ereignisses durch Gesamtzahld er Stichproben
→ Träger ist Teilmenge von Ω, wobei für alle Ereignisse aus dem Kompletent des Trägers die Wahrscheinlichkeit 0 gilt. D.h. Träger enthält alle relevanten Ereignisse mit relevanten Wahrscheinlichkeiten.

Stetige W-Maße und Riemann-Dichten

Riemann-integrierbare Funktion (Riemann-Dichte):

$$f(x) \geq 0 \ (x \in \mathbb{R}) \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Rechteck-Verteilung:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in (a,b) \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

Exponential-Verteilung ($\alpha > 0$):

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} 1_{(0,\infty)}(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Gaußverteilung (Normalverteilung $\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$):
→ Mittelwert: α und Streuung: σ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

Standartnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

Gamma Verteilung ($\alpha, v > 0$):

$$\gamma(x) := \begin{cases} \frac{\alpha^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Gamma Funktion:

$$\Gamma(v) := \int_0^{\infty} (x^{v-1} e^{-x} dx), v > 0$$

Eigenschaften:
→ $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
→ $\Gamma(v+1) = v \cdot \Gamma(v)$
→ $\Gamma(v) = (v-1)!\ , v \in \mathbb{N}$

Beta(μ, v)-Verteilung:

$$be_{\mu,v}(x) := \begin{cases} \frac{\Gamma(\mu+v)}{\Gamma(\mu)\Gamma(v)} x^{\mu-1}(1-x)^{v-1} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion

Definition:

$$F(x) := P((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$$

Berechnung der Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \text{ und } P((a,b]) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Eigenschaften:
→ F ist monoton nicht fallend
→ $F(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = 1$
→ F ist rechtsseitig stetig
→ F besitzt linksseitige Grenzwerte
→ Für Einpunktmengen gilt: $P(\{x\}) = F(x) - F(x-)$

Mehrstufige W-Modelle

Versuchsdurchführungen können gekoppelt sein, wobei ein Versuch von allen bzw. einer Teilmenge von Vorversuchen abhängig ist. Dies kann die Wahrscheinlichkeit ändern.

Koppelung stetiger Modelle

→ Die Z-Dichte muss Riemann-Integrierbar sein:

$$f(x_1, ..., x_n) := f_1(x_1) \cdots f_n^{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}; x_n)$$

Unabhängige Koppelung

Beispiel: Münzwurf
Hierbei berechnet man eine Produktdichte:

$$f(\omega_1, ..., \omega_n) = f_1(\omega_1) \cdot f_2(\omega_2) \cdots f_n(\omega_n)$$

Vereinfachte Formel für n-faches Bernoulli-Experiment:

$$f(\omega_1, ..., \omega_n) = p^k (1-p)^{n-k} \text{mit} k = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

Vereinfachte Formel für Standart-Normalverteilung:

$$f(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + ... + x_n^2)}$$

Zufälliges Ziehen ohne Zurücklegen

→ Beispiel für eine Markow-Koppelung. Hierbei hängt die Wahrscheinlichkeit bei einmal ziehen nur von dem dazugehörigen Zustand ab, und nicht von mehreren. Keine Markow-Kopplung wäre demnach Bei einem Münzwurf zu gewinnen, wenn man drei mal hintereinander Kopf hat

Anzahl der möglichen Permutationen:
→ Gegeben: n Objekte aus N Objekten
→ Es gilt $(N)_0 = 1$ und $(n)_n = n!$

$$|\Omega_{\neq}| = N \cdot (N-1)(N-2)...(N-n+1) := (N)_n$$

Anzahl möglicher Kombinationen:

$$|\Omega' = \frac{(N)_n}{n!} =: \binom{N}{n}$$

Verallgemeinerung:

$$f(\omega_1, ..., \omega_n) = \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n}, \ mit\ k = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

$$P(B_k) = \binom{n}{k} \frac{(K)_k (N-K)_{n-k}}{(N)_n}, \ mit\ k = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

Zufallsvariablen und Bildmodelle

Zufallsvariable X fässt ein oder mehrere Ereignisse eines Zufallsexperimentes zusammen.
Beispiel Würfelwurf:
$\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsraum: (Ω, Σ, P)
$\rightarrow$ Ω ist die Menge der 36 Ereignisse
$\rightarrow$ Σ ist die Potenzmenge von Ω
$\rightarrow$ $P(\{n_1, n_2\}) = 1/36$ mit $n \in \{1, .., 6\}$
$\Rightarrow$ X_1 Zufallsvariable für ersten Würfel
$\Rightarrow$ X_2 Zufallsvariable für zweiten Würfel
$\Rightarrow$ S Zufallsvariable für Summe der Würfel
Hinweis: Eine Zufallsvariable ordnet jedem Ereignis aus Ω einen Reellen Wert zu

Bildmodelle und Verteilung von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen lassen sich in Funktionen überführen, Beispiel Münzwurf: Es gilt: $\omega_i \in \Omega$

$$f^X(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{für } \omega = \text{Kopf} \\ 1 & \text{für } \omega = \text{Zahl} \end{cases}$$

Bildmodelle für diskrete Verteilung

Hypergeometrische Verteilung:
Beispiel Urnenmodell: N = Gesamtanzahl Kugeln, K = Anzahl Kugeln mit Eigenschaft, k = gesuchte Anzahl , n = Stichprobengröße:

$$h(N, K, n; k) := f^{Z_n}(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Binomial-Verteilung:
Beispiel Würfelwurf: n = Stichprobengröße, k = Anzahl Erfolge , p = Erfolgswahrscheinlichkeit:

$$b(n, p; k) := f^{S_n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n$$

Geometrische Verteilung:
Wahrscheinlichkeit, dass der erste Erfolg beim k-ten mal passiert:

$$geo^+(p; k) := pq^{k-1}, k \in \mathbb{N}$$

Negative Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeit, dass man k Versuche braucht, bis man r Erfolge hat:

$$f^{W_r}(k) = nb^+(r, p; k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, k = r, r+1, ...$$

Bildverteilung stetiger W-Dichten

Wenn gilt: Y = a + bX, P^X bekannt ist und eine Verteilung über $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ ist mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b! = 0$, dann gilt für Verteilungsfunktionen:

$$F^Y(y) = F^X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Für R-Dichten gilt:

$$f^Y(y) = \frac{1}{b} f^X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Randverteilungen

Randverteilung Gegebene Tabelle:

	Z-Dichte $f(t,d)$				
t	$d=5$	$d=10$	$d=15$	$d=20$	$\Sigma = f^T(t)$
1	0,06	0,12	0,02	0,00	0,20
2	0,10	0,20	0,15	0,05	0,50
3	0,03	0,09	0,12	0,06	0,30
$\Sigma = f^D(d)$	0,19	0,41	0,29	0,11	$\Sigma = 1$

$\rightarrow$
Rechts: Randverteilung von t
$\rightarrow$ Unten: Randverteilung von d
$\rightarrow$ Summe innerhalb der Randverteilungen ist 1

Stoachastische Unabhängigkeit von ZV

Sind ZV $Y_1, ..., Y_n$ stochastisch unabhängig, dann sind auch folgende Spezifikationen stochastisch Unabhängig:
$\rightarrow$ Umstellung der ZV
$\rightarrow$ Teilmengen der ZV
$\rightarrow$ disjunkte Gruppen von ZV
$\rightarrow$ messbare Funktionen mit den ZV
Außerdem gilt:
$\rightarrow$ Jede konstante ZV ist von anderen ZV stochastisch unabhängig

Summenverteilung und Faltung

$\rightarrow$ $\star$ bedeutet Faltung
Faltung bei Z-Dichten (abhängige ZV):

$$f^{X+Y}(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} f^{X,Y}(x, z-x), z \in \mathbb{Z}$$

Faltung bei R-Dichten (abhängige ZV):

$$f^{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f^{X,Y}(x, z-x) dx, z \in \mathbb{R}$$

Faltung bei Z-Dichten (unabhängige ZV):

$$f^{X+Y}(z) = (f^X \star f^Y)(z) = \sum_{x=0}^{z} f^X(x) f^Y(z-x), z \in \mathbb{N}_0$$

Faltung bei R-Dichten (unabhängige ZV):

$$f^{X+Y}(z) = (f^X \star f^Y)(z) = \int_0^z f^X(x) f^Y(z-x) dx, z \geq 0$$

Faltung für Binomialverteilung:

$$B(n, p) \star B(m, p) = B(n+m, p)$$

Faltung für Poisson-Verteilung:

$$\pi(\lambda_1) \star \pi(\lambda_2) = \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Faltung für geometrische-Verteilung:

$$Nb^+(r_1, p) \star Nb^+(r_2, p) = Nb^+(r_1 + r_2, p)$$

Faltung für Normalverteilung:

$$\mathcal{N}(a, \sigma^2) \star \mathcal{N}(b, \tau^2) = \mathcal{N}(a+b, \sigma^2 + \tau^2)$$

Faltung für Gamma-Verteilung:

$$\Gamma_{\alpha,\mu} \star \Gamma_{\alpha,\nu} = \Gamma_{\alpha,\mu+\nu}$$

$\rightarrow$ Spezialfall: $Exp(\alpha) = \Gamma_{\alpha,1} \Rightarrow \Gamma_{\alpha,2} = Exp(\alpha) \star Exp(\alpha)$

Quantile

α-Quantil:

$$F^X(u_{\alpha^-}) \leq \alpha \leq F^X(u_\alpha)$$

Berechnung Quantile der $\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$-Verteilung:

$$u_\beta^{\mathcal{N}(\alpha,\sigma^2)} = \alpha - u_\beta^{\mathcal{N}(0,1)} \cdot \sigma$$

Erwartungswert

$$ZV : X = (X_1, ..., X_2) \Rightarrow EX = (EX_1, ..., EX_n)$$

Erwartungswert diskrete Modelle

$$\text{disrkete ZV: } X \geq 0 \Rightarrow EX := \sum_{k \in \Omega'} k \cdot P(X = k)$$

Hinweis:
Erwartungswerte diskreter Verteilungen: Formelsammlung
Für einen negativen ZV-Anteil: Funktion in positiv und negativ trennen und der Erwartungswerte einzeln berechnen
Eigenschaften des Erwartungswertes:
→ Wahrscheinlichkeit für einen Punkt 1 ⇒ EX = der Punkt
→ Monoton: Zwei ZV: $X \leq Z \Rightarrow E(X) \leq E(Z)$
→ linear: $E(aX + b) = a \cdot EX + b$
→ Erwartungswert ist nicht unendlich: $E(X + Y) = EX + EY$
→ Zwei ZV stochastisch unabhängig: $EXY = EX \cdot EY$

Erwartungswert stetiger Modelle

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f^X(x) dx$$

Hinweis:
Erwartungswert stetiger Verteilungen: Formelsammlung
Gemeinsame R-Dichten berechenbar über mehrfache Integrale

Streuung und Varianz

$$\text{Varianz: } Var(X) := E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

$$\text{Streuung: } Str(X) := \sqrt{E(X - EX)^2} = \sqrt{Var(X)}$$

Nützliche Rechenregeln:
→ $Var(X + a) = Var(X),\ Str(X + a) = Str(X)$
→ $Var(aX) = a^2 Var(x),\ Str(aX) = |a| Str(X)$
→ $E(X - a)^2 = Var(X) + (EX - a)^2,\ E(X^2) = Var(X) + (EX)^2$
→ $Str(X) = 0 \Leftrightarrow Var(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = EX) = 1$
→ X,Y stoch. unabhängig $\Rightarrow Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Hinweis:
Varianzen diskreter und stetiger Verteilungen: Formelsammlung

Kovarianz

$$Kov(X, Y) := EXY - EXEY = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

Korrelationskoeffizient:

$$korr(X, Y) := \frac{Kov(X, Y)}{StrX\ StrY}$$

Rechenregeln Kov (X,Y reelwertig nicht unendlich):
→ $Kov(X, X) = Var(X)$ und $Kov(X, Y) = Kov(Y, X)$
→ $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Kov(X, Y)$
→ X,Y stoch. unabhängig: $Kov(X, Y) = 0$
Rechenregeln Korr (Var(X),Var(Y)!=0,X,Y nicht unendlich):
→ $-1 \leq korr(X, Y) \leq 1$
→ $korr(X, Y) = \pm 1 \Leftrightarrow Y = a + bX$
→ Minimalwert: $Var(Y)[1 - (korr(X, Y))^2]$

Momente

Moment der Ordnung k: $m : k := E(X^k)$

k-tes absolutes Moment von X: $M_k := E(|X|^k)$
Berechnung: $m_k^X = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f^X(x) dx$
Momenterzeugende Funktion:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = 1 + t m_1^X + \frac{t^2}{2!} m_2^X + ...$$

Eigenschaften:
→ $M_X(0) = 1, M'_X(0) = EX, M''_X(0) = E(X^2)$
→ $M_{aX+b}(t) = M_X(at) e^{tb}, a > 0, b \in \mathbb{R}$
→ $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$ mit X,Y stoch. unabhängig
→ $M_{X_n}(t) \rightarrow M_X(t) \Leftrightarrow X_n \rightarrow X$ für n→ ∞
→ $Y\ \mathcal{N}(0, 1) \Leftrightarrow M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

Zufällige Summen / bedingte Erwartungswerte

Zufällige Summe:
→ Y ist ZV mit Werten in $\mathbb{N}_0$
→ $X_1, X_2, ...$ seien reellwertige ZV

$$S = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

Eigenschaften (S = Zufälige Summe, EY,EX nicht unendlich):
→ $ES = EY \cdot EX_1$
→ $Var(S) = EY \cdot Var(X_1) + Var(Y) \cdot (EX_1)^2$

Bedingte Verteilung $P(X \in B | Y = y)$:

$$P^{X|Y}(B|y) = P(X \in B | Y = y) = \frac{P[(X \in B) \cap (Y = y)]}{P(Y = y)}$$

Gesetz der großen Zahlen

Konvergenz fast sicher:
→ Verteilungsfunktion integrieren, falls Wert, dann konvergiert meine Funktion bei unendlichen Versuchen gegen diesen Wert.
Beispiel Würfelwurf:
→ Funktion: $Y_n = 1/n*$ Summe der Würfelwürfe
⇒ Y(w) = Erwartungswert = 3,5. D.h. Die Funktion konvergiert gegen 3.5 bei zunehmender Versuchsanzahl

Konvergenz stochastisch:
Hierbei betrachtet man Fehlertoleranzen:

$$\lim_{n \to \infty} P(|Y_n - Y| \geq \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$$

Y_n ist mein Grenzwert. Y ist der Wert meiner Versuche. Mein Epsilon gibt mir an, wie weit ich von meinem Grenzwert entfernt bin.

Chewbakka-Ungleichung:
Beispiel: ZV X: Artikellänge, E[X] = 1000, Str(X)= 200, $\epsilon = 400 \Rightarrow$ Wsk für Artikellänge zwischen 600 und 1400 liegt bei: $P[|X - 100| < 400] \geq 1 - \frac{200^2}{400^2} = 0,75$
Formel: $P(|Y - EY| \geq \epsilon) \leq (1/\epsilon^2) \cdot Var(Y)$

Zentraler Grenzwertsatz:
→ X_i stoch. unab. / $Str(X_i) < \infty$

$$\frac{S_n - E(S_n)}{Str(S_n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i) - n \cdot E(X_1)}{\sqrt{n} Str(X_1)} \rightarrow^V Y$$

→ Folgen von ZV jeder Verteilung konvergieren eingesetzt in diese Formel gegen eine Standardnormalverteilung.

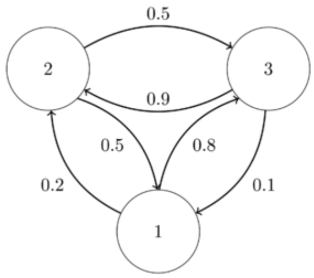
Markow-Ketten

Stochastischer Prozess:
Zufallsexperiment abhängig von der Zeit

Markow-Kette:
Stochastischer Prozess, Folge von Beobachtungen mit Markow-Koppelung mit bekannter Ereignismenge

Homogene Markowkette:
Übergangwahrscheinlichkeiten sind für alle Zeitpunkte gleich. Ablesbar in der Matrix/Graph

Übergangsgraph:
Zustände als Knoten und Übergange mit Wahrscheinlichkeiten als Kanten. Beispiel Wetter:



1 = Sonne scheint
2 = bewölkt
3 = Regen

Übergangsmatrix:

$$M = \begin{Bmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{Bmatrix}$$

Pfad einer Markow-Kette:
Wahrscheinlichkeit, nach n Schritten von Knoten A nach Knoten B zu gelangen. Dafür wird die Übergangsmatrix n mal potenziert. Genannt n-Schritt-Übergangsmatrix

Startverteilung:
Vektor, wie wahrscheinlich es ist, an einem bestimmten Knoten zu starten. D.h. Vektor-Matrix-Mulitplikation

Chapman-Molatov-Cocktail-Gleichung: $P^{n+m} = P^n \cdot P^m$

Irreduzibilität:
Jeder Zustand der Übergangsmatrix kann nach n-Schritten von jedem Punkt aus erreicht werden

Periodisch:
Wenn bei einer n-Schritt-Übergangsmatrix, nach n Schritten, der Ausgangszustand erreicht wird.

Gleichgewicht (stationär):
Ein Startvektor π mit Matrix M für die gilt: $\pi \cdot M = \pi$. π ist ein Zeilenvektor, bei dem die Summe der einträge, die alle größer 0 sind, 1 ergibt. π findet man, indem man ein Gleichungssystem aufstellt und dieses löst.
Ist ein Übergangsgraph einfach zusammenhängend, so gilt $\pi_i \cdot p_{ij} = \pi_j \cdot p_{ji}$

$\rightarrow$ Ist eine homogene Markow-Kette irreduzibel und aperiodisch, so existiert eine Gleichgewichtsverteilung mit $\pi > 0$ oder es gibt keine Gleichgewichtsverteilung und alle $\forall \pi_i = 0$

$\rightarrow$ Eine Übergangsmatrix ist genau dann aperiodisch und irreduzibel, wenn eine Potenz m existiert, sodass die Übergangsmatrix P^m nur strikt positive Einträge enthält. Passiert das, so konvergiert P^m gegen die Gleichgewichtsverteilung Π

g